# 高校１年生を対象とした斜方投射の数学授業の実践

## －課題解決とその過程の振り返りを通して－

葛城　元　・　深尾　武史　・　黒田　恭史
（京都教育大学附属高等学校 数学科・京都教育大学 数学科・京都教育大学 数学科）

Practice of the Mathematics Class of the Projectile Motion for Tenth Graders
－Through Problem Solving and Reviewing Processes－

Tsukasa KATSURAGI・Takeshi FUKAO・Yasufumi KURODA

2018 年 11 月 30 日受理

**抄録**：生徒自らが観察・測定・実験と数学の活用を通じて課題解決し，数学の有用性や数学を学ぶ意義を実感できる教材として，既存の斜方投射を題材とした 2 次関数の決定がある。本教材を工夫することで，高校数学との学習のつながりを重視させることや, 数学を主軸とした探究の方法を学習させることが可能となる。教育実践では，課題解決とその過程を生徒同士が振り返る活動を付加した。これは，平成 34 年度から実施される高等学校数学科の学習指導要領の目標に位置付く，数学的な見方・考え方を働かせた学習活動と数学的活動の一層の充実を企図したものでもある。そこで本研究の目的は，藤井ら（2013）が開発した教材をもとに，高校 1 年生を対象に教育実践を実施し，学習成果物による集計・分析を通して，数学的探究モデルに基づく課題解決とその過程（方法）の振り返りに関する学習成果を明らかにすることである。

**キーワード**：斜方投射，2 次関数，数学的探究モデル，課題解決，振り返り

## Ⅰ．はじめに

日本の科学技術の動向を踏まえ，國府（2015）は様々な現実事象を数学的問題として取り上げ，数学を適応・展開して問題解決できる人材の育成が必要であると指摘している [1)]。数学と現実事象の関連性を理解させる上では，現実の問題を数学の問題に書きかえる過程と，得られた数学的結果を現実の問題に翻訳する過程を，数学教育の中で扱うことが望ましい [2)]。こうした学習に取り組む意義は，理論上の解と実験で得られた結果が一致することを，生徒自らが確認・説明できることや，より進んだ結果を数学で予測・決定できる点にある。数学が様々な場面で活かされていることを, 生徒に繰り返し経験させることは, 高校数学を学ぶ動機付けとして重要である。

これからの数学授業の在り方としては，次の点を踏まえて実践していく必要があると考える。第一に，具体的な事象の考察に，習得した知識・技能を適用し，数学の理解・技能の定着につなげること。第二に，生徒自らが試行錯誤の中で数学を活用し，得られた結果を実験・検証できる活動を取り入れること。第三に，数学的な問題解決の過程を振り返り，数学内容を他の事象と関連付けたり発展させたりすること。

高等学校数学科の学習指導要領 [3)] の目標では,「数学的活動」を文頭に置き，目標全体に関連付けることで，体験的・作業的な学習活動を重視してきた。平成 34 年度から実施される学習指導要領 [4)] の目標では,「数学的活動」と「数学的な見方・考え方」を相互に働かせた学習活動の充実が示されるようになった。また，生徒に事象を解明する上での科学的思考や探究の方法の基礎を習得させることをねらいとした新教科「理数科」も実施される。今後は，日常・社会的な事象に対して数学を活用して問題解決することや，問題解決の過程を振り返って考察を深めるといった活動的で共同的な学習が一層求められる。こうした教科横断型教育の導入に関心が高まる中で，黒田（2018）は STEAM 教育 [注 1)] を例に，教育目標の設定，養うべき能力の明確化，評価方法の確立などの検討の必要性を指摘している [5)]。形式的な導入が目的ではなく,「数学を体系的に捉える力」と「数学を活用する力」を養える教材を開発し，学年段階ごとに系統付けた上で，教育実践により有効性を検証することが重要である。

高等学校数学科（平成 34 年度以降）の第 1 学年では，必修科目である数学 I で「数と式」「図形と計量」「2 次関数」「データの分析」を扱う。特に，2 次関数は，自動車の制動距離と停止距離，振り子の長さと周期，パラボラアンテナのアンテナ面の形状，噴水の描く曲線，斜面を沿う物体の運動（摩擦のない場合）のように，自然科学と数学の関連性が高い単元である。数学教育の研究では，2 次関数を活用した探究や発展的な学習を可能とする教材開発や教育実践を先駆的に行ってきた。近年の研究成果によると，宮川ら（2014）は，「斜面を転がる台車の運動」を中学 3 年生に，予測・数学化・検証を伴う活動を通じて課題解決する教育実践を行っている [6]。数学化では，斜面を台車が転がるときの時間と距離の関係から，高校数学で学ぶ 2 次関数（$y = ax^2 + b$）の式を発展的に扱っている。中村（2011）は，水ロケットの飛行実験で得たデータを整理し，表計算ソフトやグラフ電卓を利用して 2 次関数を求める教材を，高校 1 年生用に開発している [7]。生徒らが打ち上げ角度，気圧，水量，飛距離の条件設定を工夫することで，新たな課題を見出し課題解決するといった探究学習の可能性を見出している。藤井ら（2013）は，高校 1 年生（3 校 6 クラス）を対象に，斜方投射の現象から派生した教材を用いて，数学的活動を重視した教材開発と教育実践を行っている [8]。この実践では，グループワークによる観察・測定・実験，数学の活用を通じて，数学への興味・関心の向上と有用性の実感の獲得で一定の効果を得たと報告されている。

これらの先行研究の知見を鑑みると，データを収集・整理し，獲得したデータから定式化と数学的結果の導出を通じて，得られた結果を実験・検証するまでの一連の過程を教材内容に組み入れる，および過程一つ一つの学習活動を効果的にするための指導の手立てが必要である。教材内容をさらに深く掘り下げることは，高校数学の学習とのつながりをより重視していくことや，数学を主軸とした探究の方法を習得させることにもつながる。その一方策として，葛城ら（2016，2017）が設計した数学的探究モデル [9,10] に基づいて課題解決を行い，その過程（方法）を振り返る活動を付加することで，「データの収集・処理の妥当性」と「斜方投射の現象と 2 次関数の式の適合性」の検証を意識・改善させる学習が有効であると考えられる。そこで本研究の目的は，藤井ら（2013）が開発した教材をもとに，高校 1 年生を対象に教育実践を実施し，学習成果物による集計・分析を通して，数学的探究モデルに基づく課題解決とその過程（方法）の振り返りに関する学習成果を明らかにすることである。

## Ⅱ．数学的探究モデルの枠組み

### 1. 数学的探究モデルとは

これからの高等学校での数学授業では，現実事象を対象に数学知識を適用・活用するといった学習活動を経験させ，探究の方法の基礎を習得させることが重要である。これまでに，葛城ら（2016，2017）は，高等学校段階に相応しい科学的な思考，及び探究の方法を明示化する「数学的探究モデル」を設計し，それに基づく数学教材の開発と教育実践を行ってきた [11,12]。

数学的探究とは，「様々な現実事象に対して，数学的な観点から問いを立て，科学的思考を用いて問題解決すること」である。これを図式化したものが，図 1 の数学的探究モデルである。数学的探究モデルは，「（1）問題発見」「（2）計画」「（3）情報収集」「（4）情報整理」「（5）数学的処理」「（6）振り返り」の 6 つの段階で構成される [注 2]。「（1）問題発見」から「（4）情報整理」までの役割は，得られた情報に基づき問題を明確化すること，問題を翻訳・解釈して数学的な問いを立てることである。「（5）数学的処理」から「（6）振り返り」までの役割は，数学を適用・活用して，数学的結果を導出すること，得られた数学的結果を解釈して結果の検証を行うことである。生徒が数学的探究モデルの枠組みに従って繰

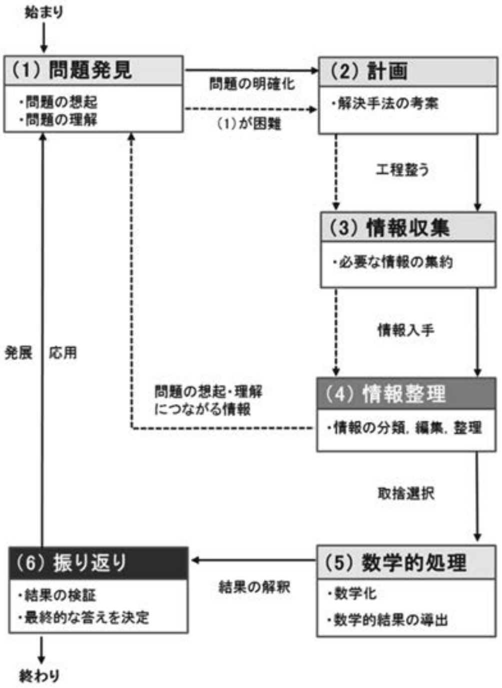


図 1　数学的探究モデル（葛城ら 2017）

り返し探究することで，数学と現実事象とのつながりをより一層認識させることができる。また，既習の数学内容を相互に関連付けたり，発展させたりすることで，広範で抽象度の高い数学の内容理解が期待される。

### 2. 数学的探究モデルの活用

高等学校で数学的探究モデルを活用するにあたっては，「授業実践型」と「課題研究型」のタイプがある（表 1）。

表１　数学的探究モデルのタイプ

| | 授業実践型 | 課題研究型 |
|---|---|---|
| 目的 | 探究の手法を体験・習得 | 自ら問いを立て問題解決 |
| 主導 | 指導者 | 生徒 |
| 形態 | 授業中心（題材や単元末） | 多様（授業時間外も含む） |
| 時期 | 高校１・２年生 | 高校２・３年生 |
| 評価 | 成果物中心 | 成果発表中心 |

「授業実践型」とは，数学的探究モデルに対応した教材を用いて，指導者が生徒に授業形式で指導することである。指導者が主導となることで，数学を主軸とした探究の方法を，生徒に確実に体験・習得させることがねらいにある。学習形態は一斉授業であり，題材のまとまりや授業の単元末で扱う。実施時期は高校 1・2 年生の段階であり，一つの題材を短期間で遂行する。評価方法は，生徒の活動内容をレポートや作品などの学習成果物を通して，指導者が数学的探究モデルの段階と対応させて集計・評価する。

「課題研究型」とは，数学的探究モデルに基づいて生徒自らが探究活動をすることである。生徒（個人あるいはグループ）が主導となることで，生徒自らが問いを立て問題解決することがねらいにある。指導者も助言・指導することで，問いの立て方や課題解決の方法の質を高めさせることが可能である。学習形態は，授業時間外や総合的な学習の時間（SSH・SGH）で行うため多様である。実施時期は，高校 2・3 年生の段階であり，一つの題材を長期的に取り組む。評価方法は，成果発表（校内・校外）を通して，探究活動の成果を評価する。

上記の点から，二つのタイプの共通点は，指導者と生徒が数学的探究モデルを共有し，数学を主軸とした探究の過程を遂行していくことにある。数学的探究モデルの段階ごとの活動内容や過程間を辿ることで，生徒が探究の方法をどの程度遂行できたのかを，実際に点検・評価できる点が特徴の一つとして挙げられる。

## Ⅲ. 斜方投射を題材とした数学教材

### 1. 教材の概要

教育実践で扱う「斜方投射を題材とした 2 次関数の決定」の背景を述べる。岩間ら（2010，2011）は，数学の有用性を実感させることをねらいとして，斜方投射を題材とする教材開発と中学 3 年生 66 名に教育実践を行った [13,14]。中学生らに計算結果と実験結果を結びつけさせたことで，数学の有用性を十分に伝えることができた。藤井ら（2013）は，岩間ら（2010，2011）を参考にして，数学的活動を強く意識した教材開発と高校 1 年生 232 名に教育実践を行った [15]。課題内容は，「発射台を使って，ある高さから鉄球を転がし発射します。鉄球は放物線を描き落ちていきます。床に置いたペットボトルに落ちてきた鉄球を一発で入れようと思います。さて，どのようにペットボトルの位置を決めればよいでしょうか。」である。図 2 のように，本番は机の上からであるが，本番前は床の上で，観察・測定・実験と計算[注3)]を行うようにする。その理由は，得られたデータをもとに 2 次関数を決定し，実験できない箇所での到達点（ペットボトルの位置）を，数学を用いて予測させたいからである。教育実践の結果と高校生が記述した感想から，数学への興味・関心を引き出すこと，数学の有用性を実感させるには一定の効果があったと結論付けた。

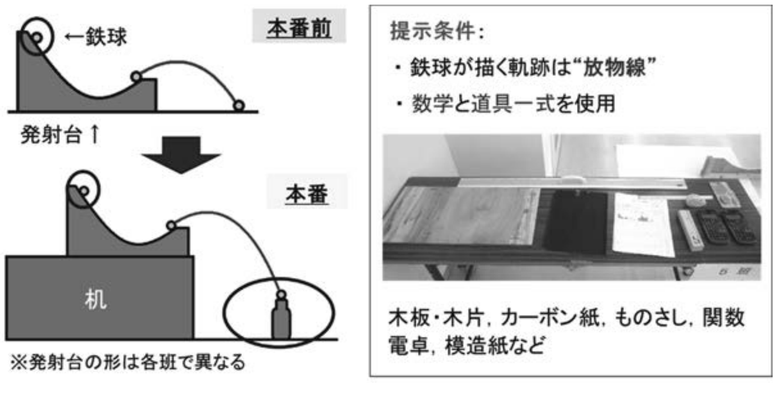


図２　藤井ら（2013）の教材

こうした自然科学から派生した教材は，生徒に数学を学ぶ意義を理解させることができ，日々の高校数学の学

習へ深くつながるものであると考えられる。単にグループで作業や実験が楽しいという段階で終わるのではなく，数学を主軸とした探究の方法を習得させることも重要である。今回の教育実践では，数学的探究モデルの「授業実践型」に基づき，生徒らが課題解決しその過程を振り返る活動を行う。振り返りまで行う理由は，課題解決時には，意識することが困難であると考えられる「データの収集・処理の妥当性」と「斜方投射の現象と 2 次関数の適合性」の検証を学習させるためである。

### 2. 数学的探究モデルとの対応

今回の教育実践で扱う教材内容を，数学的探究モデルの枠組みに対応させる（図 3）。

「（1）問題発見」では，「問題の想起」「問題の理解」について，斜方投射の現象を扱う。問題の明確化は，発射台から発射された鉄球をペットボトルの中に入れることである。

「（2）計画」では，「解決手法の考案」について，観察・測定・実験からデータを収集・整理し，そのデータをもとに数学で分析して課題解決する。

「（3）情報収集」では，道具一式を使用して，課題解決に必要なデータを収集する。

「（4）情報整理」では，収集して得られたデータの中から，鉄球の軌跡上や落下位置に関する情報を整理し，取捨選択する。

「（5）数学的処理」では，「数学化」について，得られたデータから数学を用いて 2 次関数を決定する。「数学的結果の導出」について，求めた 2 次関数から 2 次方程式を解くことで，ペットボトルの位置を決定する。

「（6）振り返り」では，「結果の検証」について，計算で求めた通りにペットボトルを設置して，本番（実験・検証）を行う。「最終的な答えを決定」について，本番（実験・検証）で成功すれば，ペットボトルの位置が正しいと判断し，それを答えとする。

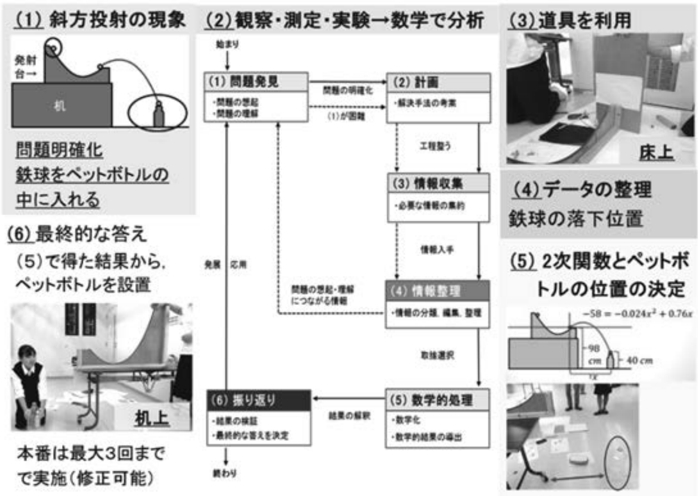


**図 3**　数学的探究モデルとの対応

## Ⅳ. 数学的探究モデルの授業実践型に基づく教育実践

### 1. 教育実践の概要

「斜方投射を題材とした数学教材」を扱った教育実践の概要は，以下の通りである。

目標：（1）生徒自らが試行錯誤の中で数学を活用し，実験・検証することで課題解決する。
　　　（2）生徒同士が課題解決の過程（方法）を振り返り，考察を深める。

対象：京都教育大学附属高等学校，第 1 学年，40 名（1 班 4 人の 10 班編成で実施）

時期：2018 年 6 月 19 日（1・2 回目），27 日（3 回目）の計 150 分

場所：京都教育大学附属高等学校　展示ホール（1・2 回目），HR 教室（3 回目）

内容：1・2 回目（100 分）は，床に置いたペットボトルに落ちてきた鉄球を一発でいれる課題解決に取り組み，図 4 のワークシートにまとめる。図 4 の「①2 次関数の決定」では，測定箇所と測定結果を整理させ，2 次関数を求めるまでの過程を記述させる。「②ペットボトルの位置」では，必要となった新たな測定箇所と測定結果を整理させ，ペットボトルの位置を求めるまでの過程を記述させる。「③本番」では，ペットボトルを設置した位置を記入させ，本番（実験・検証）の結果を選択肢の中から一つ選ばせる。

3 回目（50 分）は，図 4・5 のワークシートを活用して課題解決の方法（過程）を振り返る。図 5 の「【観点 1】データの分析」では，測定箇所や測定回数，「【観点 2】原点の設定」では，原点を設定した位置と利点，「【観点 3】2 次関数の決定」では，2 次関数を選択した理由や解法を記述させる。

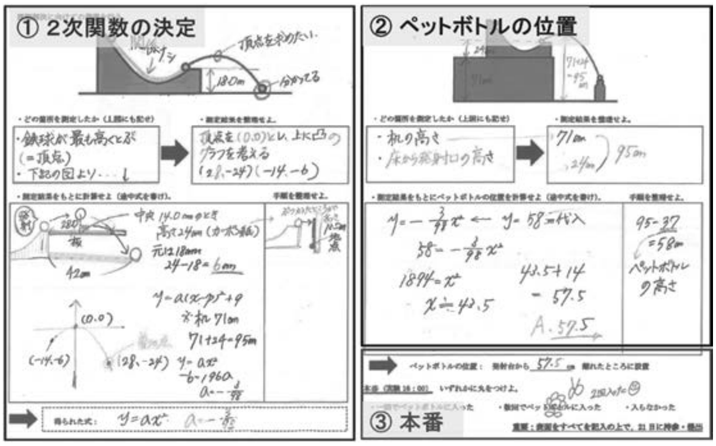


**図 4**　ワークシート（1・2 回目）

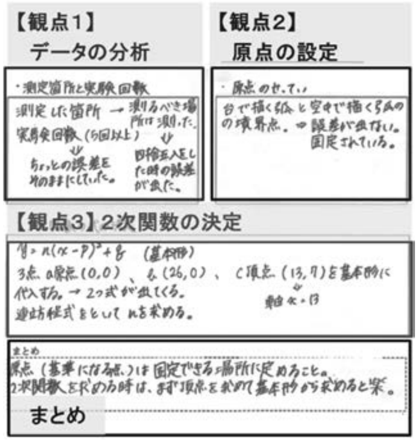


**図 5**　ワークシート（3 回目）

## 2. 教育実践の結果・考察

（1）課題解決（100 分）

1・2 回目の課題解決（100 分）では，指導者が図 3 の「(1) 問題発見」「(2) 計画」の内容を提示・説明し（5 分），生徒が「(3) 情報収集」「(4) 情報整理」「(5) 数学的処理」「(6) 振り返り」の内容に取り組んだ（95 分）。

「(1) 問題発見」では，指導者が図 6 に記載された資料を配布して課題内容を読み上げた。課題内容は，「発射台を使って，ある高さから鉄球を転がし発射します。鉄球は放物線を描き落ちていきます。床に置いたペットボトルに落ちてきた鉄球を一発で入れようと思います。さて，どのようにペットボトルの位置を決定すればよいでしょうか。ただし，本番は机の上からですが，実験は床の上で行って下さい。」である。ここでは，鉄球が動いた後の軌跡が放物線であることを認めた上で活動に取り組むことを指示した。

課題：発射台を使って，ある高さから鉄球を転がし発射します。鉄球は放物線を描き落ちていきます。床に置いたペットボトルに落ちてきた鉄球を一発で入れようと思います。さて，どのようにペットボトルの位置を決定すればよいでしょうか。ただし，本番は机の上からですが，実験は床の上で行って下さい。

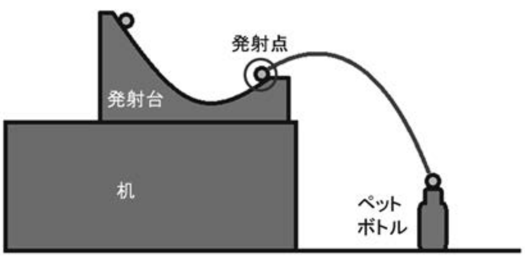


**図 6**　課題内容

「(2) 計画」では，各班に用意された道具一式（関数電卓，木板・木片，カーボン紙，模造紙，ひも，ものさしなど）を用いて観察・測定を行い，得られたデータをもとに数学で課題解決するように説明した。ただし，本番前について，発射台と鉄球を用いて観察・測定を行う際には，机の上では行わず，床の上のみで行うことを指示した。

「(3) 情報収集」では，各班で協力をして課題解決に必要なデータの収集を行った（図 7）。データを収集する際には，木板・木片を支える人，鉄球を発射台から転がす人，ものさし・メジャーで測定する人，測定したデータをワークシートに記入・整理する人など，グループの中で役割分担して取り組んでいた。活動を開始した直後は，鉄球を適当に発射台から転がす，発射台自体をものさしで測定するといった課題解決に関連しない部分に注目していた。そこで，指導者がヒントカードを用いて「鉄球の軌跡は，発射された後が放物線である」や「発射台の形は軌跡に関係なく，2 次関数は放物線である」を必要に応じて各班に助言した。助言後は，徐々に鉄球の軌跡や鉄球の落下位置に着目することができ，2 次関数に注目して，式の決定に必要なデータを生徒同士で協力して収集した。データの収集については，いずれの班も測定回数が少なく，1 回のみで終える班から 10 回ずつ行う班までとばらつきがあった。

「(4) 情報整理」では，図 4 の①の記入欄に，測定箇所と測定データを箇条書きで整理していた。データを整理する際には，大半の班が集中・密集した点を平均値と捉えていた。また，全ての班が収集したデータをワークシート（図 4）内の発射台の図に，記号や番号を用いてまとめていた。次の「(5) 数学的処理」の段階に移行するには，得られたデータを取捨選択する必要がある。各班とも，発射後の軌跡が放物線であることを意識できて

おり，発射台自体を測定して得られたデータは，２次関数の決定に必要ではないことから除外できていた。

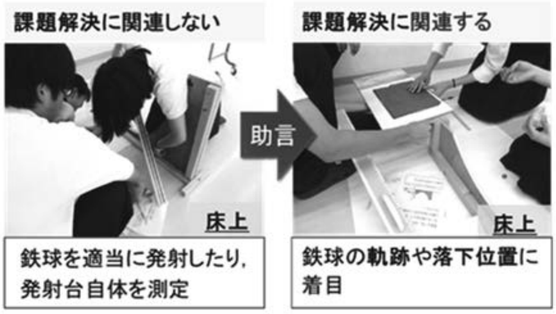


**図７**　データの収集

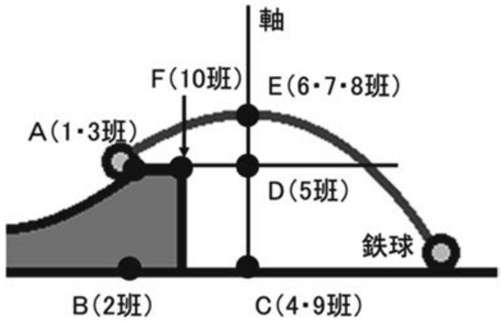


**図８**　原点の設定箇所

「(5) 数学的処理」では，先ほど収集・整理したデータと関数電卓を積極的に活用して，２次関数を決定し（展開１），ペットボトルの位置を決定した（展開２）。

展開１では，原点を発射台自体（A・B・F）や放物線の軸・頂点上（C・D・E）に各班で設定した（図８)。A（1・3 班）は，測定のし易さから鉄球が発射される位置を原点に設定した。B（2 班）は，発射台の底を$x$軸と捉えた。一方，C（4・9 班）・D（5 班）・E（6・7・8 班）は，対称性に注目し，測定の工夫を交えながら放物線の軸・頂点上に原点を設定した。特に，E は２次関数を単純形にすることをねらいとしていた。F（10 班）は，同じような発想であったが，比較的測定しやすい発射台の縁を放物線の軸であると誤判断していた。班の中には，測定による困難性や誤差が生じると予測・判断したため，測定回数を 10 回に増やす工夫が見られた。

２次関数の決定では，図４の①の記入欄に，計算過程や求め方・手順を記入した。２次関数は，一般形$y = ax^2 + bx + c$，基本形$y = a(x-p)^2 + q$，単純形$y = ax^2$のいずれかに決定した。基本形を選択した班（1〜5 班）は，頂点の位置や鉄球の落下位置に関するデータと放物線の対称性を利用して，放物線の軸を決定した。図９のように，軸を決定した後は，基本形$y = a(x-p)^2 + q$の式に得られたデータを代入することで，定数$a$，$q$を求めて２次関数を決定した。単純形を選択していた班（6〜8 班）は，計算や式が比較的楽に処理することをねらいとした上で，定数$a$を求めて２次関数を決定した。一般形を選択した班（9・10 班）は得られたデータを３つ一般形の式に代入することで定数$a$，$b$，$c$を求めて２次関数を決定した。

展開２では，図４の②の記述欄に，発射台の発射点から床までの高さや，ペットボトルの高さを改めて測定し，得られたデータを整理した（「(3) 情報収集」「(4) 情報整理」を再度行った)。図 10 のように，それらの差を求めた値を２次関数に代入し，２次方程式を解くことでペットボトルの位置を決定した。２次方程式の解を求める際には，大半の班が関数電卓を活用していたので，２次関数を求めるよりも容易に求められた（全 10 班の中で計７班が正答していた)。

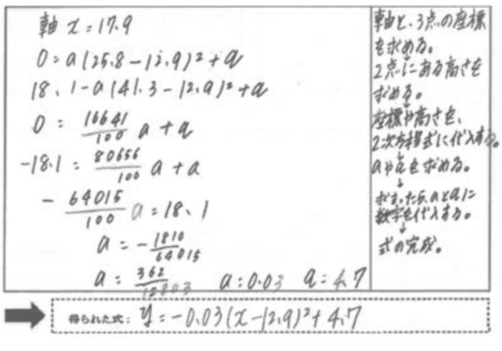


**図９**　基本形の式の決定（１班）

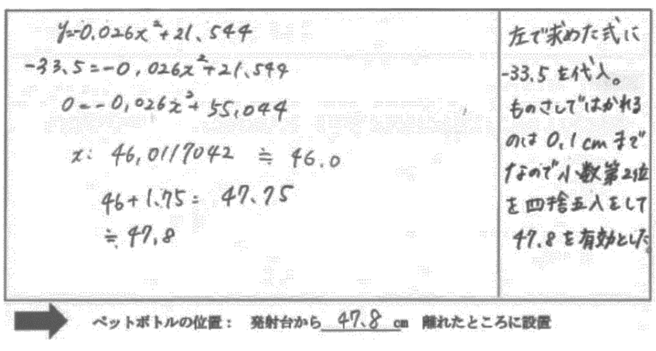


**図 10**　ペットボトルの位置の決定（９班）

「(6) 振り返り」では，「(5) 数学的処理」で求めた位置にペットボトルを設置し，位置の決定が正しいものであったかの実験・検証を３回行った（展開３)。最後に，展開 1〜3 の内容をワークシートに個別で整理させ，別紙に本時（1・2 回目）の感想を記述した。

表２は，図４のワークシートを集計し，課題解決（1・2回目）の結果の正誤を班ごとに整理したものである。表内の「○」は正答，「×」は誤答を表す。最終結果は，全正答が６つの班（1・4・6・7・8・9班），誤答が４つの班（2・3・5・10班）であった。展開１は各班で決定した２次関数を表す。1～5班が基本形，6～8班が単純形，9・10班が一般形であった。誤答した３班は，式にデータを代入したときの誤り，10班は軸の取り間違いによる誤りであった。展開２は，ペットボトルの位置の決定である。誤答した２班は，式にデータを代入したときの誤りであった。展開３は，本番での実験・検証である。誤答した2・3・5・10班は，３回以内にペットボトルの中に鉄球を入れることができなかった。

**表２**　課題解決（1・2回目）の結果集計

| 班 | 展開１ | | 展開２ | 展開３ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $y=-0.03(x-12.9)^2+4.7$ | ○ | ○ | ○ |
| 2 | $y=-\frac{19}{512}(x-16)^2+\frac{53}{2}$ | ○ | × | × |
| 3 | $y=-\frac{7}{169}x^2+\frac{14}{13}x$ | × | ○ | × |
| 4 | $y=-\frac{555}{8192}x^2+26.1$ | ○ | ○ | ○ |
| 5 | $y=-\frac{110}{4761}x^2+4.4$ | ○ | ○ | × |
| 6 | $y=-0.0314x^2$ | ○ | ○ | ○ |
| 7 | $y=-\frac{11}{338}x^2$ | ○ | ○ | ○ |
| 8 | $y=-\frac{3}{98}x^2$ | ○ | ○ | ○ |
| 9 | $y=-0.026x^2+21.544$ | ○ | ○ | ○ |
| 10 | $y=-0.13x^2+1.94x+18$ | × | ○ | × |

生徒が記述した本時（1・2回目）の感想について，一部抜粋したものを紹介する（枠囲み内は原文ママ）。

- まさか数学を使ってこのような実験をするとは思っていなくて、こんな風に使う数学もあるんだと驚きました。グループで式を考え、成功させたことは数学以外のことも身についたと思います。
- 授業で計算させられる２次方程式のように整数の答えや、有限小数ではなく、無理数、小数が多いことが授業中の数学と日常生活の数学との差と感じました。
- 今回の学習で２次関数の理解、数学に対して向き合い方が大きく変わった。数学が放物線などの身の回りで役に立っておりもっと詳しいことまで勉強していきたいと思った。

本時では，生徒らが試行錯誤の中で数学を活用し，実験・検証するといった課題解決に取り組むことで，数学を積極的に活用する態度の育成につなげることができた。次時（３回目）では，課題解決の過程（方法）を振り返ることで，「データの収集・処理の妥当性」と「斜方投射の現象と２次関数の式の適合性」の検証を行う。

（2）課題解決の過程の振り返り（50分）

３回目の課題解決の過程（方法）の振り返りでは，前時（1・2回目）の課題解決について，「【観点1】データの分析」「【観点2】原点の設定」「【観点3】２次関数の決定」の３つの観点を，生徒同士が振り返った。本時（50分）は，各班での振り返りを25分，全体共有を15分，まとめと感想の記入を10分で実施した。

各班での振り返りの際には，前時で扱ったワークーシート（図4）をもとに議論した。議論した内容を，ワークシート（図4）の裏面にある図11に整理した。図11のワークシートについて，観点１の「データの処理」では，測定箇所や測定回数，観点２の「原点の設定」では，原点をそのように設定した理由や利点，観点３の「２次関数の決定」では，その２次関数を扱った理由，および解法や式の特徴などを記入した。また，各観点を踏まえた上でのまとめも記入した。

観点１の「データの分析」の振り返りについては，次のようになった（「(3) 情報収集」「(4) 情報整理」の段階）。課題解決（1・2回）時におけるデータの測定回数は，１回のみで終える班から

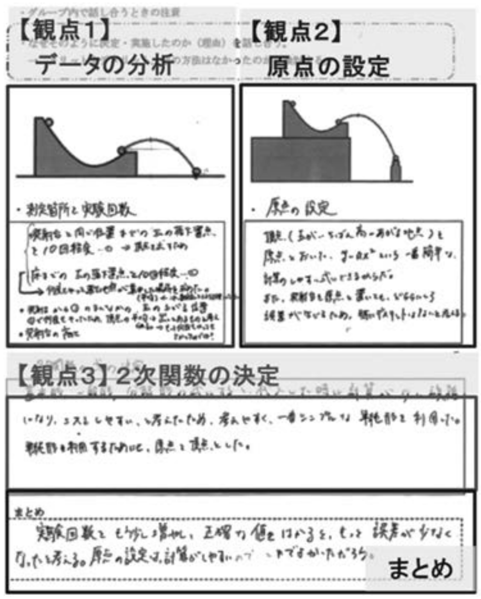


**図11**　ワークシート（一部抜粋）

10 回ずつ行う班があった。処理方法は，大半の班が集中・密集した点を平均値として捉え利用していた。そこで，指導者からデータの測定回数と処理方法を中心に，振り返りを行うように指示した。各班では，「1 回ボールをころがして，カーボン紙できろくをとった。」「発射口と平行な位置の座標：5 回，頂点の$y$座標：2 回，ペットボトルの高さ：1 回」などの測定箇所と測定回数を具体的に整理していた。班の中には，「測定箇所は最終的に必要のなかったものもあり，初めにもっとどこが必要か考えておくべきだった。」「放物線を考える前まではうまく測定していたが，放物線を意識すると測定箇所を決めるのが難しくなった。」などの課題解決時には気付くことが困難な点について言及していた。全体共有の中では，鉄球の発射の際の測定誤差をより丁寧に考慮すべきという意見が挙がった。誤差を最小限に留めるには，測定回数を増やす（3 つの班），平均値を算出する（6 つの班）などの意見が出た。全体共有の中で発表した 2 班では，「振り返りを行った際に，一番大切なのは正確さであることに気付いた。」「正確にするためには，回数を増やし計算することが大切なのだと思った。」を記述していた。他の班の記述では，「平均も取らず，最後に転がして落ちた鉄球の位置で決定してしまったので，正確ではなかった。」「実験しているときは正しいと思っていたが，話し合いながら振り返ると案外見落としていた点が多かったので，実験の 1 つ 1 つ吟味して進めていくべきだと思う。」などの意見が挙げられた。上記の内容を踏まえると，課題解決時の活動内容を再度整理することで，データを分析する際は正確さが重要であることに気付くことができた。さらに，今回はデータの測定回数が少なく，正確さという点では十分ではなかったことから，具体的な改善案を見出すことができた。

観点 2 の「原点の設定」の振り返りについては，次のようになった（「(5) 数学的処理」の段階）。図 8 に示した通り，生徒らは原点を発射台自体（A・B・F）や放物線の軸・頂点上（C・D・E）に設定していた。そこで，指導者から原点を設定した位置と設定した理由を中心に，振り返りを行うように指示した。原点を発射台自体に設定した班（A・B・F）では，「球が発射される位置を原点とした。」「求めた 2 次関数の見えている部分の一番初めの部分だから。」などを記述していた。さらに，「原点が動かずに一点に固定される所にした。」「頂点が動かないので測定しやすい。」といった利点にも言及できていた。一方，原点を放物線の軸・頂点上に設定した班（C・D・E）では，「机の延長部分を$x$軸として鉄球の放物線（上に凸）を$y$軸としてその交点を原点にした。」「頂点を原点とすることで，他の測定箇所の座標が簡単に出せると思ったから。」などを記述していた。全体共有の中で発表した 6 班は（図 12），「頂点を原点においた。$y = ax^2$という一番簡単な計算のしやすい式にできる。」「どの測定でも誤差は生じるから，楽に解けるように原点を設定した。」などを記述していた。全体共有を通じて，「放物線上でなくても，原点は設定できることが分かりました。」「他の部分を原点にしてもメリットはあったし，逆にデメリットも見えたので，班によって様々だったんだと知りました。」などの記述が見られた。よって，原点の設定は，データの分析時の正確さの追求と 2 次関数の決定を容易に行うためには重要であることに気付くことができた。

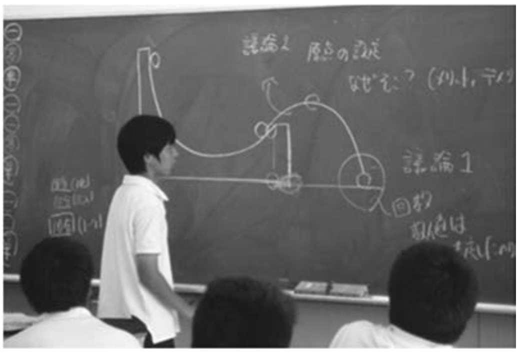

**図 12　原点の設定（全体共有：6 班）**

観点 3 の「2 次関数の決定」の振り返りについては，次のようになった（「(5) 数学的処理」の段階）。基本形を選択したのは 1〜5 班，単純形を選択したのは 6〜8 班，一般形を選択したのは 9・10 班であった（表 2）。そこで，指導者から 2 次関数の解法や式の特徴を中心に，振り返りを行うように指示した。基本形を選択した班は，得られたデータから軸を先に求めていたので，それに適用できる基本形の式を扱っていた。班の記述では，「鉄球の動きを放物線と見なして考え，また頂点（$p, q$）や軸$x = p$の決定条件から基本形を使用した。」「$y = ax^2 + bx + c$だと 3 点求める必要があって大変だと思うので，$y = a(x - p)^2 + q$がいいのだと考えました。」などがあった。一般形を選択した班は，3 点のデータを求めていたので，一般形の式を扱っていた。班の記述では「3 点を求めることができたので$y = ax^2 + bx + c$の形にして連立方程式で$a, b, c$を求めました。」「軸の位置的に 3 点がすぐに求まり，$y = ax^2 + bx + c$の形を使った。」などがあった。単純形を選択した班は，計算処理を容易化することを目的として，単純形の式を扱っていた。班の記述では，「原点のところを決め，測定した値を計算する過程はややこしかったが原点のことから考えると計算はやりやすかった。」「中学校で習った式「$y = ax^2$」を使って

単純な式が出せた。」「基本形，一般形，分解形注4）の式にすると，代入した時に計算が少し煩雑になり，ミスをしやすいと考えたため，考えやすく，一番シンプルな単純形を利用した。」「切片がない分，計算がしやすい。」などがあった。全体共有では，各班の２次関数の形を確認し，どのようにして式の決定を行ったのかを説明させた。発表した９班は，２次関数を一般形に決定しており，「関数電卓で求められるため簡単，座標が３つ分かったため一般形を使った。」「「軸$x = 0$」というのは計算しやすい。」「式自体は，$y = ax^2 + bx + c$で良かった。」などを挙げていた。このように，収集したデータと２次関数の扱い方によって，アプローチの仕方が異なることを共有した。また，アプローチの仕方が適切であったかや利点についても検討できた。

まとめの記述では，「原点の設定はみんなの意見を聞いたりしてとてもいいと思ったけど実験回数を増やしてもっと正確な値をだすべきだったと思いました。」「原点（基準になる点）が固定できる場所に定めること。２次関数を求める時は，まず頂点を求めて基本形から求めると楽。」「今回は鉄球の軌跡３点を求めるところから間違っていたため，これからは必ず見直しをする。」などの全体共有を踏まえての反省に関する記述があった。

生徒が記述した本時（３回目）の感想について，一部抜粋したものを紹介する（枠囲み内は原文ママ）。

・今回話しあったことで、やり方に穴があったり、若干正確さに欠けたり、他の方法も見えてきた。様々な方向から１つのことを求めるということも大切ではないかと考えた。
・何を中心に考えるか（計算のしやすさ、値の求めやすさなど）によって出てくる式が違い、みんな同じ実験なのにたくさんの答えがあっておもしろかったです。
・数学が簡単に正確にするべきものだと思っていたから、数字を意識してしまうのかなと思いました。なので、このような実験の場合は逆に回数に時間をかけ、たくさんの数を計算し、位置・回数を意識して正確性を求めるべきだったのだと思いました。

課題解決の過程（方法）の振り返りでは，３つの観点について次のことが明らかになった。

【観点１】データの分析について，課題解決時にはデータの分析による正確さを意識・重視することは困難であったが，振り返りを通じて，データの測定回数を増やすことや，収集・整理したデータを計算して平均値を求めるといった改善策を見出せた。

【観点２】原点の設定について，振り返りを通じて，各班で異なった原点の設定を全体で共有を行った。原点の設定の仕方を工夫することで，データを分析する際の正確さを追及できることや，２次関数の決定を容易化されることを意識できた。

【観点３】２次関数の決定について，振り返りを通じて，得られたデータの扱い方と原点の設定箇所から，２次関数の決定に至るまでを全体で共有した。２次関数の決定で扱う式同士を比較・吟味したりすることで，斜方投射の現象に対する２次関数の適合性の検証について意識できた。

## Ⅴ．まとめ

本研究では，藤井ら（2013）が開発した既存の教材を，数学的探究モデルの枠組みに対応させた上で１・２回目に課題解決を行い，その過程（方法）を振り返る活動を３回目に付加して教育実践を行った。教育実践による結果は，生徒らのワークシートの記述を数学的探究モデルの枠組みに対応付けて集計・分析した。教育実践における学習成果を整理すると次のようになる。

課題解決（１・２回目）について，「(5）数学的処理」と「(6）振り返り」では，展開１～3を６つの班がすべて正答し，４つの班が誤答した。生徒自らが試行錯誤の中で数学を活用し，実験・検証するといった課題解決の過程を遂行でき，さらには数学を活用しようとする態度の育成につなげた。

課題解決の過程（方法）の振り返り（３回目）について，「(3）情報収集」と「(4）情報整理」では，「【観点１】データの分析」，「(5）数学的処理」では，「【観点２】原点の設定」と「【観点３】２次関数の決定」において，生徒らの振り返りによる学習活動から，「データの収集・処理の妥当性（分析の正確さの追求）」，「斜方投射の現象と２次関数の式の適合性（原点の設定箇所や２次関数の式同士の比較）」に関する具体的な記述を見出せた。

## 付記

本研究は，京都教育大学 平成 30 年度教育研究改革・改善プロジェクト「高大連携によるアクティブ・ラーニング教材の推進事業」(深尾武史，田窪啓人，葛城元）の支援を受けている。また本論文は，「葛城元，深尾武史，黒田恭史（2018）「高校 1 年生を対象とした斜方投射の数学授業の実践－課題解決の方法を振り返って－」数学教育学会秋季例会予稿集，pp.2-4」の内容を大幅に加筆・修正したものである。

## 注

1）STEAM は，Science（科学），Technology（技術），Engineering（工学），Art（芸術），Mathematics（数学）の頭文字で並べたものであり，アメリカで提唱されたものである。文部科学省（2018）は，思考の基盤となる STEAM 教育を高等学校の生徒すべてに学ばせる必要があると指摘している（文部科学省（2018）「Society 5.0 に向けた人材育成～社会が変わる、学びが変わる～」文部科学省ホームページ，pp.11-13，http://www.mext.go.jp/component/a_menu/other/detail/__icsFiles/afieldfile/2018/06/06/1405844_002.pdf（2018 年 11 月 30 日現在)）。

2）「数学的探究モデル」の理論的内容は，葛城，黒田（2016），葛城ら（2017）に詳しい。

3）各発射台で形状が微妙に異なるため，2 次関数とペットボトルの位置がそれぞれ異なる。

4）分解形とは，$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$のことを指す。ただし，$\alpha$，$\beta$は 2 次関数のグラフと$x$軸との交点である。

## 参考・引用文献

1）國府寛司（2015）「数学と諸分野の協働の推進のために数学・数理科学の教育について考えること」数学教育学会秋季例会発表論文集，pp.142-143

2）David N. Burghes，Morag S. Borrie（1981）『Modelling with Differential Equations』Ellis Horwood Limited，Chichester，pp.13-14

3）文部科学省（2009）『高等学校学習指導要領解説 数学編』実教出版，東京

4）文部科学省（2018）「高等学校学習指導要領」文部科学省ホームページ，pp.111-128，264-268，http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2018/07/11/1384661_6_1_2. pdf（2018 年 11 月 30 日現在）

5）黒田恭史（2018）「「Society5.0 に向けた人材育成に係る大臣懇談会」報告書を読み解く－「EdTech」と「STEAM 教育」に着目して－」数学教育学会秋季例会予稿集，pp.144-146

6）宮川敏之，深尾武史，谷口和成，渡邉伸樹，柳本哲（2014）「数学的モデリングにおける理科的問題の可能性－中学生対象の台車実験を通した学習－」数学教育学会誌，55（1・2），pp.11-20

7）中村好則（2011）「水ロケット教材の高校数学 I の課題学習での活用の可能性」日本数学教育学会誌，93（3），pp.19-26

8）藤井敬雄，赤川佳穂，磯部勝紀，林慶治，深尾武史（2013）「斜方投射を題材とした二次関数の決定に関する教材の開発と実践」第 17 回数学教育学会 大学院生部会発表論文集，pp.13-15

9）葛城元，黒田恭史（2016）「科学的思考方法の習得を目指したオリガミクスによる数学教材の開発－ダイヤカット缶を題材として－」数学教育学会誌，57（3・4），pp.125-139

10）葛城元，黒田恭史，林慶治（2017）「数学教育における知識創造を目指した数学的探究モデルの設計と教育実践」知識共創，7，pp.Ⅳ3.1-12，http://www.jaist.ac.jp/fokcs/（2018 年 11 月 30 日現在）

11）前掲 9)，pp.125-139

12）前掲 10)，pp.Ⅳ3.1-12

13）岩間広祥，愛木豊彦（2010）「斜方投射について考察する中学生用の授業について」岐阜数学教育研究，9，pp.49-53

14）岩間広祥，愛木豊彦，山路健祐（2011）「斜方投射をグラフを用いて考察する教材の開発と実践」岐阜数学教育研究，10，pp.106-112

15）前掲 8)，pp.13-15