三角関数の原理の理解を目指した授業実践

－定義，求値，グラフの指導方法を工夫して－

葛城　元・黒田　恭史

Practice Aimed at Understanding the Principles of Trigonometric Functions

― Devise Instruction Method for Definitions, Find Values and Graphs ―

Tsukasa KATSURAGI, Yasufumi KURODA

教職キャリア高度化センター教育実践研究紀要

第２号　(2020年３月)

Journal of Educational Research
Center for Educational Career Enhancement

No.2（March 2020）

三角関数の原理の理解を目指した授業実践

－定義，求値，グラフの指導方法を工夫して－

葛城　元・黒田　恭史

（京都教育大学附属高等学校・京都教育大学）

Practice Aimed at Understanding the Principles of Trigonometric Functions
－Devise Instruction Method for Definitions, Find Values and Graphs－

Tsukasa KATSURAGI・Yasufumi KURODA

2019 年 11 月 29 日受理

抄録：三角関数の初歩を学習する高等学校数学科において，三角関数の正確な知識・技能の習得と深い内容理解を目指した教育内容の充実化を図ることは，今後生徒自らが三角関数を様々な場面へ広く応用することにもつながる。しかし，生徒が三角関数の意味や特徴を理解することは容易でないことからも，そこでのつまづきを丁寧に段階的に教えるなどの工夫を取り入れた授業実践が必要であると考える。

本研究の目的は，生徒が三角関数の原理を理解することをねらいとして，その学習内容の配列から指導方法を工夫し，高校 2 年生の理系標準クラス 32 名を対象に三角関数の定義，求値，グラフに関する授業実践を行い，授業実践の結果から指導方法を検討することである。

キーワード：三角関数，高等学校数学科，授業実践

Ⅰ．はじめに

高等学校数学科の数学Ⅱで学習する三角関数は，図形への計量を重点に置いた三角比を関数的な立場から取り扱ったものである。ここから，三角関数の相互関係や性質，加法定理，三角関数の合成などの諸公式を導出し，指数関数，対数関数，微分，積分の考えを結び付けることで，さらに高次の数学内容への発展が可能となった。高等学校数学科の新学習指導要領（文部科学省 2019）では，三角関数の性質，式，グラフの分析や考察を通じて，三角関数の意味や特徴の理解を図ることを目標に位置付けている。三角関数の定義，求値，グラフなどの基礎的・基本的な学習内容の定着を図りながらも，そこで生徒自らが深く考えられる場面を設定するなどの意味理解を重視した授業の工夫が求められる。しかし，三角関数で取り扱う学習内容は他の単元と比べて多く，授業の進行速度は必然的に速くなる。結果，生徒は問題の解法パターンを記憶し，効率良く問題を解くことに終始するため，三角関数の意味や特徴の理解を図る上では十分とは言えない。加えて，高校 1 年生を対象とした三角比の値の変化に関する調査結果では，三角比に対する関数的な見方が十分でなく，今後の三角関数の学習に影響を及ぼす可能性を指摘している（二澤ほか 2016）。したがって，指導者は生徒が理解困難とする三角関数の学習内容を把握・整理し，その意味や特徴を丁寧に段階的に教える視点を持ち合わせておくことも必要である。

実際に，生徒が三角関数を学習する初期の段階では，次の 3 点で学習内容の理解が困難であると推測される。一つ目は，「弧度法とその必要性」である。従来慣れ親しんできた度数法と弧度法の対応を示すことや，弧度法を導入することの意義・利点を見出すことが難しい。弧度法を用いることは，扇形の弧の長さや面積の公式を簡潔に表現できることや関数の実数変数に角を扱えるなど理論上有効であり，極限や微分での操作でも役に立つ。二つ目は，「三角比から三角関数への定義の拡張」である。三角関数は平面上の座標をもとに定義されたものであり，数学Ⅰで学習した鋭角・鈍角の三角比の定義の拡張であることを理解することが難しい。一般角における三角関数の値は，三角比と同様に角度のみで決定するものであり，動径と円の交点の座標から求まるものである。三つ目は，「三角関数のグラフの図示と周期性」である。三角関数の式に着目して拡大・縮小，平行移動，周期の

要素を正確に読み取り，段階的に三角関数のグラフを図示することが難しい。もとになる三角関数のグラフを，拡大・縮小，平行移動することで図示ができ，三角関数のグラフの特徴（周期性，対称性，最大・最小など）をより深く捉えることができる。

こうした三角関数の原理の理解をより確かなものにしていくには，授業作りにおいて，三角関数の学習内容やそれらの関連性を明示した上で，指導方法を見直し工夫していくことが望ましい。このことは，三角関数の学習内容の関連・意味付けから学習内容への発展を目指す授業事例としての蓄積と活用が期待される。

本研究の目的は，生徒が三角関数の原理を理解することをねらいとして，その学習内容の配列から指導方法を工夫し，高校 2 年生の理系標準クラス 32 名を対象に三角関数の定義，求値，グラフに関する授業実践を行い，授業実践の結果から指導方法を検討することである。

Ⅱ．三角関数の原理の理解を目指した学習内容

1. 学習構造チャートとは

ここでの「三角関数の原理」とは，高等学校数学科の数学Ⅱで学習する三角関数の応用（方程式，不等式，関数の最大値と最小値）や，数学Ⅲでの学習内容（三角関数の極限，微分法，積分法，複素数平面など）を扱う上で必要となる三角関数の定義，求値，グラフを指す。これらが三角関数の単元全体でどの段階に位置付き，どの学習内容と関連しているかを明示化する必要があると考え，学習構造チャート（齋藤ほか 2004）を活用した。

学習構造チャートとは，生徒が学ぶ各単元の内容を体系的・構造的に図式化したものである。巻末の資料は，葛城・黒田が作成した三角関数の学習構造チャート[注1）]である。学習構造チャートの作成には，三角関数での主要な学習内容を抽出し，抽出した学習内容の関連付けと学習内容全体の階層的な配置を行った。配置方法について，例えば資料の①と②を結ぶ下から上への矢印は，①の学習内容から②の学習内容が形成されることを表す。

2. 高等学校数学科における三角関数の学習構造チャート

以下では，巻末の資料の①から⑪までの学習内容とその関連性を述べる。

「①一般角と弧度法」では，動径，正負の角，始線，一般角，弧度法などを扱う。度数法と弧度法の換算，扇形の弧の長さと面積の公式を導出する。その具体例をもとにして，度数法よりも弧度法が数学の理論上で有効なものであることを考える。

「②一般角の三角関数」では，正弦・余弦・正接の定義および求値を扱う。座標平面上で座標と動径を用いて一般角に対する正弦・余弦・正接を定義する（①と関連）。特に，単位円を扱う場合は動径と円の交点のx座標が余弦，動径と円の交点のy座標が正弦，動径の傾きが正接になる。また，三角関数の値の符号や値域を考える。

「③三角関数の相互関係」では，一般角における三角関数の相互関係と，三角関数を含む等式の証明および式の値を扱う。三角関数の相互関係が三角関数の定義から導出されることや（②と関連），三角関数の値が一つ分かればそれ以外の三角関数が決定することを考える。

「④三角関数の性質」では，$\theta+2n\pi$，$-\theta$，$\theta+\pi$，$\theta+\pi/2$，$\pi-\theta$，$\pi/2-\theta$などの諸公式を扱う。単位円上の三角関数を考えることで公式を導出でき（②と関連），正接の場合は三角関数の相互関係からも導出できる（③と関連）。公式から任意の一般角における三角関数は，0 から$\pi/2$までの三角関数で表現できることを考える。

「⑤三角関数のグラフ（基本形）」では，正弦曲線，余弦曲線，正接曲線，漸近線，グラフの対称性，奇関数・偶関数，周期関数などを扱う。三角関数の最大の特徴である周期性について，例えば，正弦曲線は2πごとに同じ変化を繰り返すことや，余弦曲線は正弦曲線を$-(\pi/2)$だけ平行移動したものであることを考える（④と関連）。

「⑥三角関数のグラフ（拡大・縮小，平行移動）」では，$y=\sin(\theta-\alpha)$，$y=\sin a\theta$，$y=\sin(a\theta-\alpha)$のグラフなどを扱う（余弦や正接の場合も含む）。⑤の基本形のグラフや周期の性質をもとに，三角関数のグラフの拡大・縮小と平行移動などを図示することや，グラフから周期や最大・最小を考える。

「⑦加法定理（正弦，余弦，正接）」では，正弦，余弦，正接の加法定理を扱う。単位円を用いて余弦の加法定理を証明し，正弦，正接の加法定理を導出する（③，④と関連）。また，加法定理を用いて，三角関数の性質を証明することを考えることができる（④と関連）。

「⑧加法定理の応用」では，正弦，余弦，正弦の 2 倍角，3 倍角，半角の公式，三角関数の和と積の公式，点の回転などを扱う。正弦，余弦，正弦の加法定理から 2 倍角の公式を導出でき，そこから 3 倍角の公式，半角の公式，三角関数の和と積の公式を導出できることを考える（⑦と関連）。

「⑨三角関数の合成」では，$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$を扱う。この式の変形が加法定理から導出できることを考える（⑧と関連）。合成の表し方は一通りに定めるために，αを絶対値が最小になるようにとることや，公式の適用条件などを考える。

「⑩三角関数を含む方程式と不等式」では，②，③，⑦，⑧を含めた方程式と不等式を扱う。方程式や不等式の解を求める際には, 単位円における三角関数の定義やグラフを用いて考えることができる (②, ⑤, ⑥と関連)。

「⑪三角関数を含む関数の最大値，最小値」では，③，⑧などを含めた置き換えによる 2 次関数の最大値・最小値を求めることを扱う。

これらから，本実践における授業作りのポイントを整理すると次のようになる。まず，①，②は，三角関数のすべての学習内容の土台の部分を表すものであり，度数法と弧度法の対応付けや一般角における三角関数の定義を丁寧に押さえることで意味理解を確かにしていく。次に，③，④は⑤，⑥，⑦への三角関数のグラフや加法定理へとつながる橋渡しを担う部分である。ここでは，三角関数の相互関係や性質を利用して問題を解くことのみに留まるのではなく，三角関数の式や図と関連付けながら具体的なイメージのもとで問題を分析・考察し，意味理解を図る。続いて，⑤，⑥は⑩，⑪への三角関数を含む方程式や不等式，関数の最大値，最小値などの応用につながる部分である。三角関数のグラフの基本形および拡大・縮小, 平行移動のグラフを正確に図示できること，および図示したグラフから周期性や最大値，最小値などの三角関数の特徴を読み取れるようにしていく。

Ⅲ．高校 2 年生を対象とした三角関数の授業実践

1. 授業実践の概要

授業実践の概要は次のとおりである。

対象：国立 F 高等学校，第 2 学年，理系標準クラス 32 名

時期：2019 年 6 月～7 月

教材：三角関数（第 1 節　三角関数，第 2 節　加法定理），使用教科書は数研出版の「改訂版　数学Ⅱ」

内容：「第 1 節　三角関数」の計 13 時間の指導内容は次のとおりである。

「一般角と弧度法（2 時間）」（資料の①）

- 扇形の弧の長さと始線と動径のなす角が一対一対応することを，具体値をもとに確認する。
- 度数法と弧度法の換算表を作成して角を変換する。
- 度数法と弧度法における扇形の弧の長さと面積の公式を導出する。

「三角関数の定義と相互関係（2 時間）」（資料の②，③）

- 鋭角と鈍角における三角比から一般角における三角関数を定義する。
- 問題の状況を図や式を整理した上で，三角関数の相互関係を利用する。

「三角関数の性質（1 時間）」（資料の④）

- 三角関数の定義と単位円を利用して，三角関数の性質の公式を導出する。
- 三角関数の性質を利用して，複雑な三角関数の値を求める。

「三角関数のグラフ（4 時間）」（資料の⑤，⑥）

- 三角関数の最大値と最小値や交点に着目して三角関数のグラフを図示する。
- 複雑な三角関数の拡大・縮小および周期性に着目して，グラフの特徴を決定づける。

「三角関数の応用（4 時間）」（資料の⑩，⑪）

- 三角関数の定義に帰着して，方程式や不等式の解を求める。
- 三角関数を含む最大値，最小値を 2 次関数に帰着して求める。

次節以降の授業実践の結果では，第 2 節で「一般角と弧度法（2 時間）」，第 3 節で「三角関数の定義と相互関係（2 時間）」，第 4 節で「三角関数のグラフ（4 時間）」の一部について述べる。

2.「一般角と弧度法」の授業実践

第 1 次では動径，始線，正の角・負の角，一般角の内容を指導した。ここでは，第 2 次の弧度法を中心とした授業実践の結果を述べる。

（1）弧度法の導入

弧度法とは「弧の長さで角度を表す方法である」と端的に提示した。弧度法を考えていく上で必要となる単位円と動径を図 1 のように板書した。与えられた角度から扇形の弧の長さを求めるために，弧の長さの公式を確認した。既習内容である扇形の弧の長さの公式を生徒に問うたところ，回答の状況から理解が十分ではなかった。そこで，円周$2\pi r$を導出してから，その式に対して$(\theta/360°)$を，掛ければよいことを補足した。導出した公式を利用して，角度が$\theta=30°$と$\theta=180°$の具体値をもとに扇形の弧の長さを計算させた。この公式への角度の代入と計算の処置は大半の生徒ができていた。そして，$\theta=180°$のとき弧の長さはπであり，図 1 の単位円ではそれが半円における弧の長さを表していることを説明した。これらの角度以外にも，$\theta=270°$や$\theta=360°$の場合なども扱った。ここで角度が一つ決まれば弧の長さもそれに応じて一つ決定すること，すなわち角度と弧の長さが一対一対応することを押さえた。この説明には，扇形の弧の長さの公式と具体値を扱い，一つ一つ確認して丁寧に学習活動を進めたので，大半の生徒が理解していた。

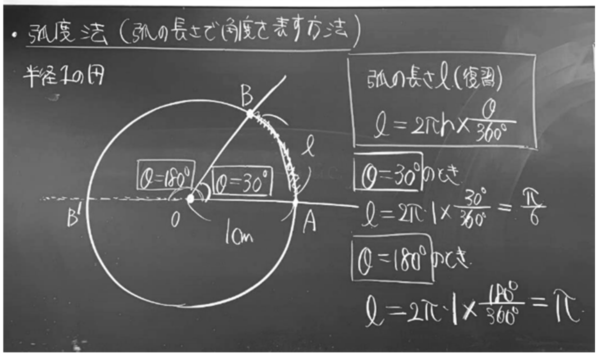


図 1　角度と弧の長さの対応

ここまでの学習内容を整理するために，角度と弧の長さが一対一対応することから，度数法での角度を，弧の長さで表せる方法が弧度法であることを説明した。生徒の疑問の一つにある弧度法を扱う理由については，後で説明することを伝え，次の度数法と弧度法の変換につなげた。

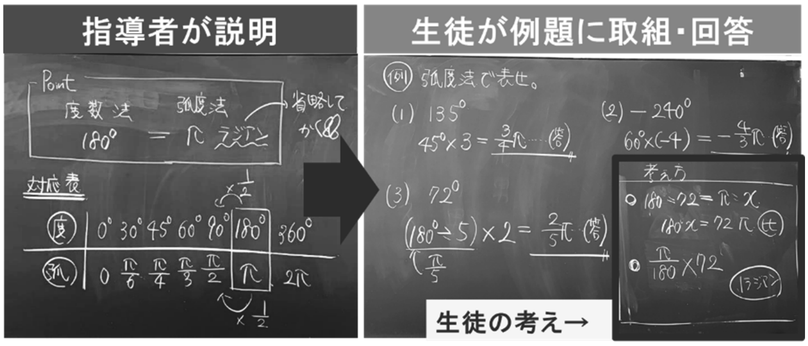


図 2　度数法と弧度法の換算

角度を弧度法で表すために，「180°$=\pi$ ラジアン」の場合を取り上げた。左辺の度数法における角度の単位は度であるが，右辺の弧度法におけるπは無名数であることから，角度を表す単位「ラジアン」を導入した。「ラジアン」とは角度を弧の長さで表したときの単位であることを説明した。そして，図 2 の左図の度数法と弧度法の対応表を次のように作成した。まず，180°がπであることは，図 1 の単位円の半円の長さを表していることから確認した。次に，その図を利用して 360°の場合は単位円の長さ 2πであることから，それぞれ 2 倍したものになっていることを確認した。同様の方法を用いて，90°，60°，45°，30°，0°の場合を生徒に求めさせた。作成した対応表から，弧度法での数値と度数法との数値が正比例の関係にあることに着目させた。ここで，正比例の関係にあることの意味を理解しているかを確認するために，1 ラジアンを度数法で表すように指示した。しかし，生徒の活動状況からは 180°$=\pi$に着目すること，およびその両辺をπで割ることから，$(180/\pi)°$を導く過程に困難が生じた。そこで指導者がその求め方を解説後に，1 ラジアンが弧の長さが 1 のときの角度を表示していることと，$(180/\pi)°$ ($\fallingdotseq 57.3°$)に対する動径が座標平面上の第 1 象限に位置することを説明した。

図 2 の右図の角度を弧度法で表す三つの例題では，図 2 の左図の度数法と弧度法の対応表を用いて求めるようにした。例題（1）は，135°$=45°\times3$から求められることを指導したので，生徒には例題（2）と例題（3）を自力解決させた。特に，例題 (3) の 72°の場合を生徒に回答させると次の 2 つの解法が見出された。一つ目は，

$180 : 72 = \pi : x$ と比を用いた解法であった。二つ目は，$\pi/180 \times 72$ と単位量あたりに基づく解法であった。指導者からは，例題（1）と例題（2）の解法と同様に，72＝（180÷5）×2 と立式すれば求められることを説明した。このように，指導過程の中で，生徒の解法や考え方を集約・共有することは，学習への参加意識を高めるとともに学習内容の理解の促進につなげられた。

（2）弧度法を導入する理由

これまで慣れ親しんできた「度数法」ではなく，新たに「弧度法」を扱う理由としては，「計算が度数法よりも容易になるため」と提示した。ここでは，度数法と弧度法の場合における扇形の弧の長さと面積の公式を比較することから，その根拠を考えるようにさせた。

図 3 の板書内容は，扇形の弧の長さの公式を，度数法と弧度法のそれぞれで導出したものである。比例式の立式では，弧の長さと角度について円の場合で考えるようにさせた。まず，弧度法の場合について，「$l : 2\pi r = \theta$: □」と板書し，$2\pi r$が円周であることを押さえた。次に，生徒に弧度法を用いて□に当てはまる角度を2πと回答させた。また，2πは度数法では 360° を表すことを再度確認した。続いて，立式した比例式から式変形を行い，$l = r\theta$を導出させた。度数法の場合についても，生徒に□にあてはまる角度を 360° と回答させてから，$l = (\pi/180°)r\theta$を導出させた。併せて，扇形の面積の場合も同様に，弧度法の場合は$S = (1/2)\, r^2\theta$，度数法の場合は$S = (\pi/360°)r^2\theta$と導出させた。

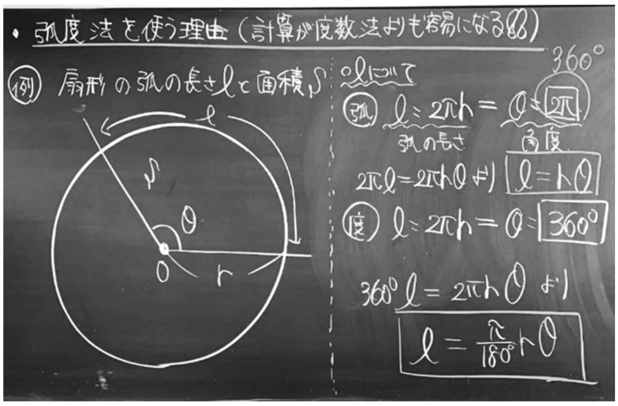


図 3　扇形の弧の長さによる比較

導出した式をそれぞれ比較させ，共通点と相違点を探すように指示した。生徒の意見や考えを取り入れながら，度数法では係数にそれぞれ$(\pi/180°)$ があり，これが弧度法の場合では，係数が 1 になることを確認した。むろん，三角関数で弧度法を扱う理由は，無名数での扱いや，四則演算ができる角度といった数学の理論上で有効になるためであるが，度数法と弧度法での扇形の弧の長さや面積の公式の比較からも，その理由を生徒に十分説明することができた。しかし，時間の都合上，度数法と弧度法のそれぞれの公式に対して，具体値を用いて計算させることができず公式の有用性をより具体的に認識させる点については十分でなかった。

最後に，半径と中心角が与えられた場合の扇形の弧の長さと面積を求める練習問題と，半径と弧の長さが与えられた場合の中心角の大きさを求める練習問題を解かせたところ，大半の生徒が回答できていた。

3.「三角関数の定義と相互関係」の授業実践

ここでは，第 3 次の三角関数の定義，第 4 次の三角関数の相互関係を中心とした授業実践の結果を述べる。

（1）一般角の三角関数の定義

座標平面上における一般角の三角関数を定義する前に，数学 I で学習した直角三角形における三角比の値を求める復習を取り入れた。図 4 の左図は，相似な三角形を対象として，三角比の値を求める例題である。まず，例題の三角比の値を求める前に，三角比の定義を確認した。次に，例題に取り組ませてから，二つの三角形の三角比の値が一致する理由を考

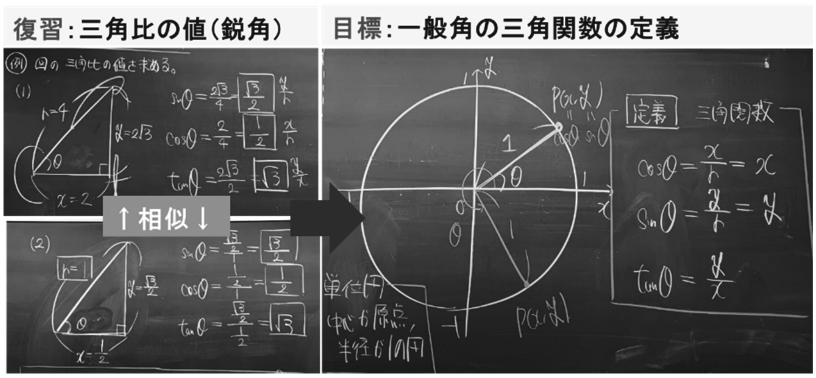


図 4　一般角の三角関数の定義

えさせた。生徒に問うたところ，相似であるからと回答したので，直角三角形における三角比の値は，辺の長さではなく角度で決定することを確認した。また，鈍角にまで拡張した三角比の定義の場合も同様であることは既習事項として押さえた。ここから，座標平面上における三角比の値は，円の半径に無関係で角度によって決定することを確認した。

一般角の三角関数の定義は，次のような流れで行った。まず，三角比の値は円の半径に無関係であることから，半径が１の円を表す単位円を導入した。次に，一般角における三角関数は，鈍角の三角比と同様に座標平面上で定義されることを提示した。続いて，単位円から$r = 1$を定義に代入して，例えば，$x = \cos\theta$の場合では，座標平面上における単位円と動径の交点のx座標を表していることを，図と式と言葉を併用して説明することで，三角関数の定義を強調した。同時に，三角関数の値の符号や三角関数の取り得る値の範囲も関連付けて指導を行った。三角関数の取り得る値の範囲について，$\sin\theta$，$\cos\theta$の場合は図 4 の板書内容を扱い説明すると納得できていたが，$\tan\theta$の値の範囲が実数全体になることを納得するのは困難であった。そこで，$y = \tan\theta$のグラフで丁寧に指導することを生徒に伝えて次に進めることにした。

三角関数の値を求める例題では，$\theta = \pi/3$，$\theta = (2/3)\pi$，$\theta = (5/4)\pi$，$\theta = (11/6)\pi$などを取り組ませた。生徒の取り組みの様子から，θが第３・４象限にある場合に困難が生じた。例えば，$\theta = (5/4)\pi$の場合では，弧度法を度数法に換算してから，角がどの象限にあるのかを把握することが困難な生徒が一定数いた。この点については，指導者が弧度法から度数法への換算方法を復習することで解決した。さらに，$\theta = (5/4)\pi$の位置を板書し，単位円と動径の交点のy座標が$\sin\theta$，単位円と動径の交点のx座標が$\cos\theta$，動径の傾き(y/x)が$\tan\theta$であることを再確認した。最終的に，生徒は三角関数の定義を用いて，三角関数の値を求めることができたが，単位円と動径の交点がどの象限に属しているかを考えて，三角関数の値の符号を決定することに課題が見られた。よって，第３・４象限における三角関数の定義は，今後も重点的に指導していく必要があると判断した。

（2）三角関数の相互関係

一般角における三角関数の定義から，三角比の場合と同様に，三角関数の相互関係が導かれることを紹介した。また，三角関数の値が一つ分かると，他の三角関数の値を求められることを，例題を通じて学習していくことを知らせた。

三角関数の相互関係を利用する例題として，「θの動径が第 4 象限にあり，$\cos\theta = 5/13$のとき，$\sin\theta$と$\tan\theta$の値を求めよ。」を扱った（図 5）。例題では，次の２点を重視して指導を行った。一つ目は，例題に対する答え方である。例題では，$\sin\theta$と$\tan\theta$の値を求めるので，答えは定数となることを確認した（図５の①）。二つ目は，θの動径が第４象限にあることと，$\sin\theta$は単位円と動径の交点のy座標，$\tan\theta$は直線（動径）の傾きを表す意味から，$\sin\theta$が取り得る符号は負，$\tan\theta$が取り得る値の符号も負であることを確認した（図５の②）。この点については，三角関数の値を求める例題での理解困難な学習内容であったので，単位円，動径，三角関数の定義をもとに丁寧に説明した。

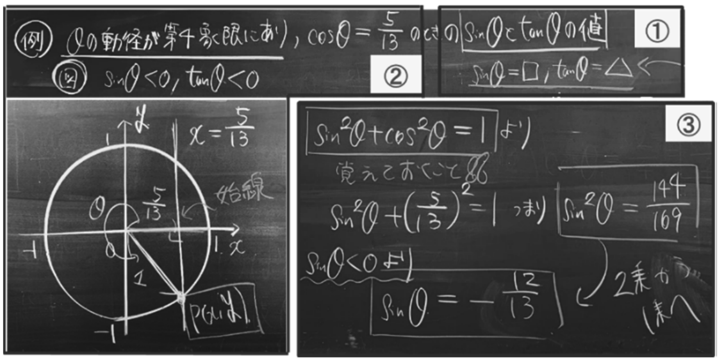


図５　三角関数の相互関係の利用

ここで，図５の線分 OP が単位円の半径であるので，三平方の定理から点 P の座標を求めることに気付ける生徒が複数いた。そこで，長さ１の動径を斜辺とする直角三角形に着目させ，その隣辺の長さが$x = 5/13$であることを確認した上で，三平方の定理を用いた解法を紹介した。紹介をした後に，三角関数の相互関係を用いたオーソドックスな解法を解説した（図５の③）。なお，等式$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$の成立には，一般角における三角関数の定義と三平方の定理から導出されることを補足しておいた。また，残りの$\tan\theta$の値を求める際には，三角関数の相互関係の一つである，$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$で求めれることを提示して進めた。

三角関数の相互関係の意味理解を深めるために，例題「$\tan\theta = -2$のとき，$\sin\theta$と$\cos\theta$の値を求めよ。」を扱っ

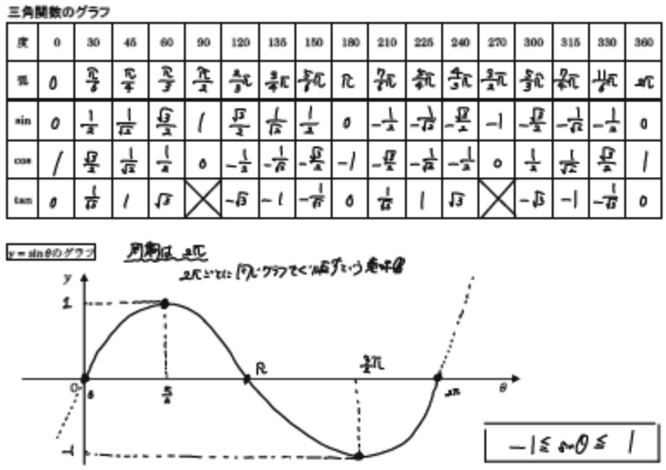
た。単位円と動径の図を板書し，直線の傾きが−2 であることから，動径における直線の傾きが負であることを確認した。併せて，単位円と動径の交点は第 2 象限と第 4 象限に存在することから，例題に対する解が二つあることを意識付けた。ここで，三角関数の相互関係の一つである$1+\tan^2\theta=1/\cos^2\theta$を提示し，求めた$\cos\theta$の正と負の値の双方が解になることを図から確認した。そして，$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$を利用して，$\sin\theta$の値をそれぞれ求めさせた。前の例題との関連性を持たせるために，この例題に「θの動径が第 4 象限にあり，…」などの条件を付した場合の答えはどうなるかを，生徒に問うたところ大半の生徒が理解できていた。

4.「三角関数のグラフ」の授業実践

第 5 次では三角関数の性質（$\theta+2n\pi$，$-\theta$，$\theta+\pi$，$\theta+\pi/2$，$\pi-\theta$，$\pi/2-\theta$）を指導した。ここでは，第 6 次の三角関数の基本形のグラフ（$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$），第 7 次の三角関数の周期を拡大・縮小したグラフを中心とした授業実践の結果を述べる。

（1）三角関数の基本形

三角関数の基本形のグラフ（$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$）の図示は，次の手順を踏んで取り組んだ。まず，図 6 の三角関数の値の表を作成させた（生徒に配布したものは表内が空欄のものである）。次に，$y=\sin\theta$の基本形のグラフを図示するために，$\theta=0$，$\pi/2$，π，$(3/2)\pi$，2πにおけるy の値を座標平面上に取らせた。これら五つの点は，$y=\sin\theta$のグラフとθ軸との交点，$y=\sin\theta$の最大値と最小値になっていることを押さえた。また，三角関数の増減について，θが 0 から$\pi/2$までと，$(3/2)\pi$ から 2πまでは，$y=\sin\theta$の値が単調増加していること，θが$\pi/2$から$(3/2)\pi$までは，$y=\sin\theta$の値が単調減少していることを作成した表をもとに確認した。これらを確認した上で，$y=\sin\theta$のグラフを図示した。$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$の場合も同様に図示した。ただし，$y=\tan\theta$の場合は，漸近線という用語や取り得る値の範囲が実数全体になることを留意して指導した。


三角関数のグラフ

度	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
弧	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

図 6　$y=\sin\theta$のグラフの図示（一部抜粋）

三角関数の特徴である周期性について，$y=\sin\theta$のグラフにおける周期は 2πであり，その意味は 2πごとに同じグラフを繰り返すことを説明した。なお，周期とは一般的に正の周期のうち最小のものを表すことも併せて説明した。この周期の意味を明確にしていくために，$2\pi\leqq\theta\leqq4\pi$で代表的な値をいくつかとり，前に図示したグラフと同じ形が現れることを確認した。併せて，$-2\pi\leqq\theta\leqq0$ の場合でも同じ形が現れることを補足した。したがって，$y=\sin\theta$のグラフにおける周期は2πであり，その意味から$y=\sin\theta$の取り得る値の範囲は，$-1\leqq y\leqq1$となることを押さえた。

ここまでの生徒の到達状況として，大半の生徒が三角関数の基本形のグラフを三角関数の表を参照しながら図示できていた。ただし，θの各値における三角関数の値を求めることには慣れておらず，計算間違いなどが随所で見られた。また，図示した$y=\tan\theta$のグラフから，$y=\tan\theta$の取り得る値の範囲が実数全体になることを視覚的に理解させることができた。この点については，一般角の三角関数の定義の段階では不十分であったので補完することができた。ただし，$y=\cos\theta$のグラフが$y=\sin\theta$のグラフをθ軸方向に$-(\pi/2)$だけ平行移動したものであることは授業時間内では十分扱えなかったので，教科書で紹介する程度に留まった。

（2）三角関数の周期の拡大・縮小

三角関数の周期の拡大・縮小のグラフを図示するために，例題として「$y=\sin2\theta$のグラフをかけ。また周期を求めよ。」を扱った。例題を通じて三角関数のグラフの周期や最大，最小を読み取ることが大切になるが，あま

りに多くの諸性質がグラフから読み取れるため，学習内容の要点を押さえた指導が望ましい。さらに，この例題に対する生徒の間違いとしては，$y = \sin\theta$のグラフをθ軸方向に 2 倍拡大したものが，$y = \sin 2\theta$であると解釈してしまうことであり，そのように間違えないように具体値をもとに確かめていく活動も必要になる。

そこで，三角関数のグラフを図示するといった技能に焦点を当てた指導をした後に，そこに見られるグラフの周期や最大，最小の読み取りを扱うようにした。前者の三角関数のグラフを図示する際には，生徒に手順を積極的に提示しながら学習活動に取り組ませるようにした。その理由は，初めて学習する生徒が複数の手順を一度に処理するのは困難であると判断したことと，指導者が生徒の学習内容に対する理解状況を段階ごとに把握し，そのような生徒を早期の段階から支援するためである。以下では，手順に従って授業実践の結果を述べる。

手順（1）では，$y = \sin\theta$（基本形）のグラフを図示した（図 7)。基本形では，前回の復習を踏まえながら，グラフとθ軸の交点，グラフの山谷（最大値と最小値）の五つの点をとり，グラフを図示するように指示した。実際に$y = \sin\theta$（基本形）のグラフの図示において，三角関数の値の表を参照せずにスムーズにかける生徒は半数程度であった。生徒の実態として，θの各値におけるyの値の計算間違いや，点が取れても$y = \sin\theta$のグラフの概形を十分に把握・理解できておらず曲線が図示できないことが挙げられた。そこで，基本形のグラフの図示の仕方を改めて補足して，手順（2）に進めた。

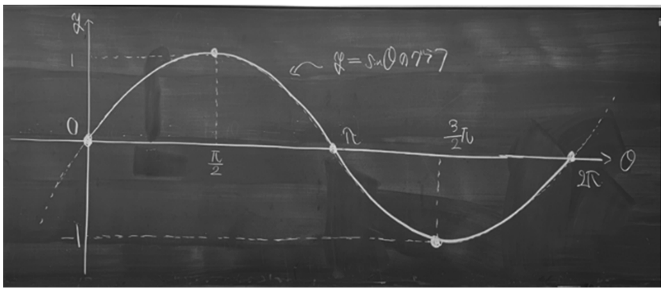


図 7　$y = \sin\theta$（基本形）のグラフの図示

手順 (2) では，θの各値に対応するyの値の比較をするための換算表を作成した（図 8 の上図)。このように換算表を作成した理由は，三角関数の値の対応を最初に整理することで計算処理が単純化され，換算表をもとに例題のグラフを図示する方が，図示の処理が容易になると考えたからである。なお，この後の学習に続く三角関数のグラフの平行移動の場合も換算表を同様に活用できる。

図内の換算表について，①では，$y = \sin\theta$（基本形）におけるθの代表的な五つの点を書いた。②では，①のそれぞれにおけるyの値を求めた。③では，①のθの各値に$1/2$ 倍した値を求めさせた。換算表の作成では①，②，③を一つずつ丁寧に指導したところ，大半の生徒が換算表を作成できていた。換算表の作成方法とその読み取り方を再度押さえてから，手順（3）に進めた。

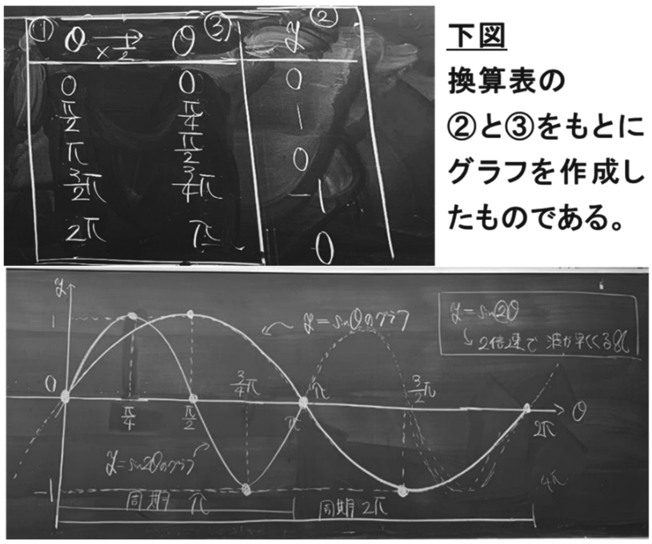


図 8　換算表によるグラフの図示

手順 (3) では，換算表の②と③の値をそれぞれ座標平面上にとった。この五つの点が，$y = \sin\theta$の代表的な五つの点と対応していることを換算表も用いて説明した。そして，各点を結んで$y = \sin 2\theta$のグラフを図示した（図 8 の下図)。ここで，$y = \sin 2\theta$の周期に関するθ軸方向に拡大・縮小の意味を次のように指導した。$y = \sin\theta$のときは，$\theta = \pi/2$で$y = 1$であったが，$y = \sin 2\theta$のときは，$\theta = \pi/4$で$y = 1$をとることを確認した。これは他のθの値でも同様であることを踏まえて，それをグラフで表すと$y = \sin 2\theta$は，$y = \sin\theta$のグラフをθ軸方向に$1/2$倍したものであることを押さえた。さらに，$y = \sin 2\theta$はπで同じ形を繰り返すことから，周期がπとなることを説明した。最後に，$y = \sin 2\theta$と$y = \sin\theta$の式から，$y = \sin a\theta$のaはグラフの周期を決定する役割があることを提示しまとめた。

上の類題として「$y = \cos 2\theta$のグラフをかけ。また周期を求めよ。」を扱ったところ，大半の生徒が換算表を利用して，グラフの図示と周期を求めることができた。

Ⅳ．まとめ

本研究の目的は，生徒が三角関数の原理を理解することをねらいとして，その学習内容の配列から指導方法を工夫し，高校2年生の理系標準クラス32名を対象に三角関数の定義，求値，グラフに関する授業実践を行い，授業実践の結果から指導方法を検討することであった。

本研究の成果をまとめると次のとおりである。

第一に，高等学校数学科の数学Ⅱの三角関数の応用や，数学Ⅲの三角関数に関する学習内容を扱う上で必要となる三角関数の定義，求値，グラフの基礎的・基本的な学習内容が，三角関数の単元全体でどの段階に位置付き，どの学習内容と関連しているかを明示化するために，学習構造チャートを作成し学習内容を配列した。そこから，度数法と弧度法の対応，三角関数の定義，相互関係，グラフの基礎的・基本的な学習内容についても，数式，図，表などを関連付けて丁寧に段階に指導するといった工夫が必要な点を見出した。

第二に，高校2年生の理系標準クラス32名を対象に三角関数の定義，求値，グラフの授業実践を行った。

定義について，弧度法の導入では，扇形の弧の長さの公式と具体値をもとに，角度と弧の長さが一対一対応することを押さえて，度数法と弧度法の対応表を作成できた。弧度法を導入する理由についても，度数法と弧度法における扇形の弧の長さと面積の公式を導出し，その比較から理解できた。また，三角関数の定義では，鋭角・鈍角の三角比の定義と例題を復習した上で，数式，図，言葉を関連付けて定義できた。しかし，三角関数の取り得る値の範囲については，$\tan\theta$が理解困難であったのでグラフを導入した際に改めて指導する必要があった。

求値について，弧度法の導入では，弧度法と度数法の変換を作成した対応表を利用してスムーズに求めることができた。三角関数の値を求める例題では，三角関数の定義と単位円を利用することで求めることができた。しかし，θが第3・4象限に属する場合に三角関数の値の符号を決定することに困難が見られたので，丁寧に指導していく必要があった。三角関数の相互関係を利用する例題では，解法の説明のみならず与えられた問題の状況を図などを利用して具体的に整理することで，答えを見積もることや得た解を確かめることができた。

グラフについて，三角関数の基本形のグラフでは，三角関数の値の表をもとに増減や最大値，最小値の確認を通じて図示した。三角関数の周期の拡大・縮小に関するグラフでは，図示方法の手順を提示し，換算表を利用することで比較的容易に例題のグラフを図示できた。ただし，周期については指導者が一方的に説明する形になってしまったので，生徒自らが周期を見出し理解できるような手立てが必要であった。

注

1）E.ハイナー，G.ワラー（1997），志賀（2002，2003），高遠，斎藤ほか（2003），川中ほか（2017）の学習内容の配列を検討し，学習構造チャートを作成した。

付記

本論文は，2019年8月23日に開催された「第5回これからの算数・数学教育を考える会（京都教育大学)」の「「わかる」を目指した高校2年生の三角関数の授業」の事例発表内容をもとに作成したものである。

参考・引用文献

E.ハイナー，G.ワラー（1997）『解析教程 上』（蟹江幸博訳）シュプリンガー・フェアラーク東京，pp.56-78
川中宣明ほか（2017）『改訂版 数学Ⅱ』数研出版，pp.115-154
齋藤昇ほか（2004）『中学校数学科「山登り式学習法」入門』明治図書
志賀浩二（2002）『中高一貫数学コース 数学2』岩波書店，pp.188-218
志賀浩二（2003）『中高一貫数学コース 数学3』岩波書店，pp.128-147
高遠節夫，斎藤斉ほか（2003）『新訂 基礎数学』大日本図書，pp.111-149
二澤善紀，渡邉伸樹，開猛雄（2016）「高等学校における RTMaC 授業研究を生かした「三角比」の教育に関する基礎的研究」数学教育学会誌，57（1・2），pp.23-36
文部科学省（2019）『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説 数学編』学校図書

資料　高等学校数学科における三角関数の学習構造チャート（葛城，黒田作成）