

惑星運動の数値シミュレーション

谷口 慶祐*1

Numerical Simulation on the Movement of Planets

Keisuke Taniguchi

抄 録：実験が人間の空間スケールに比べて極端に大きい場合や小さい場合、また時間スケールが長すぎる場合や短すぎる場合、一般的な意味での実験が行えない場合が多い。今回取り上げる惑星の運動に関する現象もその一つで、多くの場合コンピュータの中で仮想的に実験が行われる。

ここでは、惑星の運動をオイラー法やかえる跳び法によって数値計算し、ケプラーの法則がどの程度示されるかを示す。このような内容は高等学校や大学において、プログラミングの知識を少し補うことによって十分授業として扱える内容であることが分かった。

キーワード：数値シミュレーション、惑星の運動、ケプラーの法則、プログラミング

I. はじめに

一般的な意味での実験では、まず現象を観察・観測し、その結果に基づいて仮説や数式を立て、実験装置によって検証し、仮説や数式を修正する。この過程を繰り返すことによって正しい考えや数式にたどり着くのである。しかし実験が人間の空間スケールに比べて極端に大きい場合や小さい場合、また時間スケールが長すぎる場合や短すぎる場合には、一般的な意味での実験が行えない場合が多い。その場合は、コンピュータの中で仮想的に実験することになる。これが数値シミュレーションである。今回取り上げる惑星の運動に関する現象もその一つで、多くの場合シミュレーションに頼らざるを得ない。

ここでは惑星の運動を、簡単な物理法則とオイラー法やかえる跳び法を用いた自作の短いプログラムで数値計算し、よく分かっている太陽系の惑星の運動がどの程度説明できるのかを検証するため、ケプラーの法則を例に挙げる。このような内容は、プログラミングの知識を少し補うことによって、高等学校や大学における授業として十分扱える内容であることが分かった。

II. 原理

地球を含む太陽系の惑星は、太陽を焦点とする楕円軌道上を公転している。また彗星などは非常に扁平率、離心率の大きな楕円軌道を描き、場合によっては放物線を描いて太陽系を離脱してしまう。このように惑星や彗星は多様な軌道を描くにも関わらず、それらの運動は、基本的には太陽による万有引力と接線速度によって決まる回転運動にすぎず、軌道の多様性の主な原因は接線方向の速度の違いのみで、惑星の質量に関係しないことはおどろくべきことである。ただし惑

*1 京都教育大学

星相互の引力等はずかには影響しているが、ここではその影響は無視することとする。

太陽と惑星の間に働く万有引力 F は、

$$F = G \frac{Mm}{r(t)^2} \quad (2.1)$$

と表される。 G は万有引力定数、 M は太陽の質量、 m は惑星の質量、 $r(t)$ は太陽と惑星の距離で、 $r(t)$ だけが時間の関数である。

太陽を原点とする座標系を考えよう(図1)。惑星は太陽が及ぼす万有引力の下で、太陽の周りがある大きさの接線方向の速さで公転しているが、このとき惑星に働く太陽の万有引力による加速度 $a(t)$ は、

$$\begin{aligned} F = ma(t) &= G \frac{Mm}{r(t)^2} \\ \Leftrightarrow a(t) &= G \frac{M}{r(t)^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

である。すなわち加速度 $a(t)$ は惑星の質量には全く関係しない。このことは式の上からは当前であるが、感覚的には意外である。

時刻 t における惑星の座標を $x(t)$ 、 $y(t)$ とすると、太陽との距離 $r(t)$ は、

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (2.3)$$

で、惑星と太陽を結ぶ直線が x 軸となす角を $\theta(t)$ とすると、

$$\begin{cases} \cos\theta(t) = x(t)/r(t) \\ \sin\theta(t) = y(t)/r(t) \end{cases}$$

なので、 x 方向の加速度 $a_x(t)$ 、 y 方向の加速度 $a_y(t)$ はそれぞれ、

$$\begin{cases} a_x(t) = -a(t)\cos\theta(t) = -GM \frac{x(t)}{r(t)^3} \\ a_y(t) = -a(t)\sin\theta(t) = -GM \frac{y(t)}{r(t)^3} \end{cases} \quad (2.4)$$

である。すなわち加速度は惑星の位置だけで決まる。2.4式によって、惑星の位置 $x(t)$ 、 $y(t)$ から加速度 $a_x(t)$ 、 $a_y(t)$ を求め、それを数値積分して速度 $v_x(t)$ 、 $v_y(t)$ を、さらにそれらを数値積分して位置 $x(t)$ 、 $y(t)$ を順次求める。またこの位置 $x(t)$ 、 $y(t)$ から次の加速度を求め、以下繰り返すことによって惑星の公転軌道を求めることができる。

Ⅲ. 数値積分

数値積分する場合、厳密解ではないので計算誤差が生じる。その原因は、主に2つで、近似式の精度と計算時間の間隔である。ここではまず近似式の精度について考える。

次の一階常微分方程式

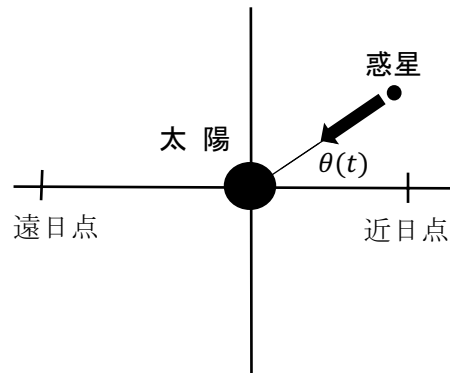


図1 太陽を原点とする座標系

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t) \quad (3.1)$$

を数値積分する場合、初期条件 $x(0) = x_0$ の下で時間間隔を Δt とし、離散点 $t_i = i\Delta t$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) において逐次算出する。解法には、オイラー法、ホイン法、4次のルンゲ・クッタ法、かえる跳び法などがある。

3.1 オイラー法

$dx(t)/dt$ の前進差分近似式は、導関数の定義により、

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (3.2)$$

と表せ、3.1, 3.2 式より、

$$f(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow x(t + \Delta t) \approx x(t) + f(t) \cdot \Delta t \quad (3.3)$$

となる。これがオイラー法に用いられる式である。

ここで精度について考えよう。 $x(t + \Delta t)$ を t のまわりでテイラー展開すると、

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{x'(t)}{1!} \Delta t + \frac{x''(t)}{2!} \Delta t^2 + \frac{x'''(t)}{3!} \Delta t^3 + \dots \quad (3.4)$$

となり、 Δt を十分小さいと考え、 Δt^2 の項以降をまとめて $O(\Delta t^2)$ と表すと、

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + \frac{x'(t)}{1!} \Delta t + O(\Delta t^2) \\ \Leftrightarrow x(t + \Delta t) &= x(t) + f(t) \cdot \Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。3.3式と3.5式の比較から、オイラー法に含まれる誤差は $O(\Delta t^2)$ となるため、この方法は1次精度の差分法であると言える。

太陽系の惑星に働く加速度は、先に 2.4 式で示したように、

$$\begin{cases} a_x(t) = -GM \frac{x(t)}{r(t)^3} \\ a_y(t) = -GM \frac{y(t)}{r(t)^3} \end{cases} \quad (3.6)$$

であり、 Δt 秒後の速度や位置をオイラー法によって求めると、

$$\begin{cases} v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x(t) \cdot \Delta t \\ v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + a_y(t) \cdot \Delta t \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \cdot \Delta t \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \cdot \Delta t \end{cases} \quad (3.8)$$

となる。

まず初期条件として $t = 0$ における惑星の位置 $x(0)$, $y(0)$ を与えると太陽までの距離 $r(0)$ は、

$$r(0) = \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}$$

となり、それを用いて $t = 0$ における加速度が、

$$\begin{cases} a_x(0) = -GM \frac{x(0)}{r(0)^3} \\ a_y(0) = -GM \frac{y(0)}{r(0)^3} \end{cases}$$

として求まる。さらに初期条件として $t = 0$ における速度 $v_x(0)$, $v_y(0)$ を与えると Δt 秒後の速度 $v_x(\Delta t)$, $v_y(\Delta t)$ が,

$$\begin{cases} v_x(\Delta t) = v_x(0) + a_x(0) \cdot \Delta t \\ v_y(\Delta t) = v_y(0) + a_y(0) \cdot \Delta t \end{cases}$$

として, また $x(0)$, $y(0)$ を与えることによって Δt 秒後の位置 $x(\Delta t)$, $y(\Delta t)$ が,

$$\begin{cases} x(\Delta t) = x(0) + v_x(0) \cdot \Delta t \\ y(\Delta t) = y(0) + v_y(0) \cdot \Delta t \end{cases}$$

としてそれぞれ求まる。さらにこれらの座標を用いて,

$$r(\Delta t) = \sqrt{x(\Delta t)^2 + y(\Delta t)^2}$$

$$\begin{cases} a_x(\Delta t) = -GM \frac{x(\Delta t)}{r(\Delta t)^3} \\ a_y(\Delta t) = -GM \frac{y(\Delta t)}{r(\Delta t)^3} \end{cases}$$

とし, $x(2\Delta t)$, $y(2\Delta t)$, ... を次々に求めていくのである。

3.2 かえる跳び法

オイラー法の場合, $x(t + \Delta t)$ を求める際, $x(t + \Delta t) = x(t) + f(x, t) \cdot \Delta t$ の式を用いるが, 時刻 t と $t + \Delta t$ の間における $x(t)$ の増分として時刻 t における値 $f(t)$ を用いるのは, 精度の点であまり適切ではない。かえる跳び法では, さらに近似をよくするため変化率として $f(t)$ ではなく時刻 t と $t + \Delta t$ の中間での値 $f(t + \Delta t/2)$ を用いる。したがって太陽系の惑星に働く加速度は, 先に2.4式で示したように,

$$\begin{cases} a_x(t) = -GM \frac{x(t)}{r(t)^3} \\ a_y(t) = -GM \frac{y(t)}{r(t)^3} \end{cases} \quad (3.9)$$

であり, Δt 秒後の位置は,

$$\begin{cases} v_x\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = v_x\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + a_x(t) \cdot \Delta t \\ v_y\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = v_y\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + a_y(t) \cdot \Delta t \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v_x\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v_y\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t \end{cases} \quad (3.11)$$

となる。ただし $t = 0$ の場合,

$$v\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = v\left(-\frac{\Delta t}{2}\right) + a(0) \cdot \Delta t$$

となるが, $t \geq 0$ のため $v(-\Delta t/2)$ は存在しない。そこで $v(\Delta t/2)$ の場合だけ,

$$v\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = v(0) + a(0) \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad (3.12)$$

とする。この方法を用いる場合、実際には全ての値を $\Delta t/2$ ごとに算出することになる。

3.3 ホイン法

2次のルンゲ・クッタ法の代表的なものにホイン法がある。2次のルンゲ・クッタ法は、一般に以下の式で表わされる。

$$\begin{cases} k_1 = f(x, t)\Delta t \\ k_2 = f(x + pk_1, t + q\Delta t)\Delta t \\ x(t + \Delta t) = x(t) + ak_1 + bk_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

ここで、 p, q, a, b は定数である。3.13 式に次の近似式、

$$f(x + pk_1, t + q\Delta t) \approx f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}pk_1 + \frac{\partial f}{\partial t}q\Delta t$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + af(x, t)\Delta t + b\left\{f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}pf\Delta t + \frac{\partial f}{\partial t}q\Delta t\right\}\Delta t \\ \Leftrightarrow x(t + \Delta t) &= x(t) + (a + b)f(x, t)\Delta t + \left(bp\frac{\partial f}{\partial x} + bq\frac{\partial f}{\partial t}\right)\Delta t^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる。また $x(t + \Delta t)$ のテイラー展開は先に示したように、

$$x(t + \Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

と表せ、この式に、

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x, t) \\ x''(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

を代入すると、

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\Delta t^2 + O(\Delta t^3) \quad (3.15)$$

となる。3.14 式と 3.15 式を比較すると、

$$a + b = 1, \quad bp = \frac{1}{2}, \quad bq = \frac{1}{2}$$

となるが、1 つの解は、

$$a = b = \frac{1}{2}, \quad p = q = 1$$

である。これを 3.13 式に代入すると、

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, t_i)\Delta t \\ k_2 = f(x_i + k_1, t_i + \Delta t)\Delta t \\ x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \quad (3.16)$$

となる。これがホイン法である。この方法は $O(\Delta t^3)$ の誤差、すなわち2次の精度を持つ。

3.4 4次のルンゲ・クッタ法

4次のルンゲ・クッタ法は以下の式で表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x, t)\Delta t \\ k_2 = f\left(x + \frac{k_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ k_3 = f\left(x + \frac{k_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ k_4 = f(x + k_3, t + \Delta t)\Delta t \\ x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right. \quad (3.17)$$

この方法は4次の精度を持っている。

IV. 惑星の運動

惑星についての数値シミュレーションの例として、まず地球について、最も理解しやすいオイラー法を用いて計算してみよう。

4.1 地球

4.1.1 パラメータ

計算に用いる万有引力定数 G 、太陽の質量 M 、1天文単位 (AU) は、

$$G = (6.67428 \pm 0.00067) \times 10^{-11} (\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)$$

$$M = 1.9891 \times 10^{30} (\text{kg})$$

$$1\text{AU} = 1.49597871 \times 10^{11} (\text{m})$$

である。また初期位置を、 x 軸上で太陽から近日点距離だけ離れた位置、すなわち、

$$\begin{cases} x(0) = 0.9833(\text{AU}) \\ y(0) = 0(\text{AU}) \end{cases}$$

とする。

4.1.2 初速度

計算を開始する位置を x 軸上の近日点とすると、 x 方向の初速度 $v_x(0)$ は0としてよいが、 y 方向の初速度 $v_y(0)$ に求められる条件は、その $v_y(0)$ を用いた場合の遠日点距離や公転周期が、実際の値1.0167(AU)や1恒星年 (365.256日) となることである。

初期位置における万有引力がそのまま向心力として作用し円軌道を描くと仮定した場合の $v_y(0)$ を $v_{y0}(0)$ とおくと、

$$G \frac{Mm}{r(0)^2} = m \frac{v_{y0}(0)^2}{r(0)} \Leftrightarrow v_{y0}(0) = \sqrt{\frac{GM}{r(0)}} \quad (4.1)$$

である。実際の楕円軌道の場合の初速度 $v_y(0)$ を $a \cdot v_{y0}(0)$ とし、 a を様々に変化させた場合の遠日点距離と公転周期を数値積分によって求め、実際の値に最も近づいた場合の a を求めた (表1)。また時間間隔 Δt が計算精度に与える影響を考えると、まず $\Delta t = 86.4(\text{sec})$ とし、次に $\Delta t = 8.64(\text{sec})$ とした。これらは、それぞれ 1/1000 および 1/10000 平均太陽日に相当する。

表 1 地球 (オイラー法), $a = 1.00833$, $\Delta t = 86.4(\text{sec})$ の場合

日数	x 座標	y 座標
0.000	0.9833000000	0.0000000000
182.603	-1.0167597780	0.0000026480
182.604	-1.0167597780	-0.0000142713
365.210	0.9833000000	-0.0000078778
365.211	0.9832999999	0.0000096173

表 1 から, $a = 1.00833$, $\Delta t = 86.4(\text{sec})$ の場合, 計算による遠日点距離は1.0167597780(AU)で, 実際の値1.0167(AU)より大きく, 計算による公転周期は 365.210 日で, 実際の公転周期 365.256 日より短い。 a を大きくすると, 遠日点距離, 公転周期共さらに大きくなり, 反対に a を小さくすると, 両方が小さくなるため, これ以上の改善は見込めないと判断した。したがってオイラー法を用いた場合は, これくらいの誤差を生じるということになる。

次にかえる跳び法で同じ条件で計算を行った (表 2) が, ほとんど精度の向上は見られなかった。また計算時間間隔をさらに 1/10, $\Delta t = 8.64(\text{sec})$ とし計算を行ったが (表 3), 結果は先と同程度で計算時間間隔 Δt を 1/10 にしてもさほど変わらないことが分かった。ホイン法や 4 次のルンゲ・クッタ法の場合は, 精度は改善するが, 授業実践で使用していないため, ここでは割愛する。

表 2 地球 (かえる跳び法), $a = 1.00833$, $\Delta t = 86.4(\text{sec})$ の場合

日数	x 座標	y 座標
0.000	0.9833000000	0.0000000000
182.605	-1.0167597780	0.0000038089
182.6055	-1.0167597779	-0.0000046508
365.210	0.9833000000	-0.0000078770
365.2105	0.9833000000	0.0000008706

表 3 地球 (かえる跳び法), $a = 1.00833$, $\Delta t = 8.64(\text{sec})$ の場合

日数	x 座標	y 座標
0.000	0.9833000000	0.0000000000
182.6050	-1.0167597778	0.0000003086
182.6051	-1.0167597778	-0.0000013833
365.2104	0.9833000000	-0.0000008783
365.2105	0.9833000000	0.0000008712

これらの結果を踏まえて、計算時間間隔 Δt は86.4(sec), $v_y(0)$ の係数 a は、1.00833 とする。

4.2 火星

次に火星について計算を行う。地球の場合と同様、計算時間間隔は $\Delta t = 86.4(\text{sec})$ とし、計算方法はオイラー法とする。

4.2.1 パラメータ

計算に用いる万有引力定数 G , 太陽の質量 M , 1AU は, 先の場合と同じである。初期位置は, x 軸上で太陽から近日点距離だけ離れた位置, すなわち,

$$\begin{cases} x(0) = 1.381(\text{AU}) \\ y(0) = 0(\text{AU}) \end{cases}$$

とする。

4.2.2 初速度

初速度は地球の場合と同様に $v_y(0) = a \cdot v_{y0}(0)$ とし, a を様々に変化させ遠日点距離が実際の値1.666(AU), 公転周期が実際の値 686.98 日となる a の値を数値積分によって求めた(表 4)。

表 4 から, $a = 1.04575$ の時, 遠日点距離は1.66620(AU)で, 実際の値1.666(AU)より大きく, 公転周期は 686.799 日で, 実際の公転周期 686.98 日より短い。 a を大きくすると, 遠日点距離, 公転周期共さらに大きくなり, 反対に a を小さくすると, 両方が小さくなるため, これ以上の改善は見込めないと判断した。

表 4 火星, $a = 1.04575$, $\Delta t = 86.4(\text{sec})$ の場合

日数	x 座標	y 座標
0.000	1.3810000000	0.0000000000
161.467	-0.1425823731	1.5169019980
161.468	-0.1425963118	1.5169019981
161.469	-0.1426102506	1.5169019980
343.396	-1.6661964475	0.0000110932
343.397	-1.6661964477	-0.0000015966
686.798	1.3810000000	-0.0000094474
686.799	1.3810000000	0.0000058630

V. ケプラーの法則

数値シミュレーションの結果がケプラーの3つの法則をどれだけ満たしているか調べよう。計算はオイラー法を用い, 計算の時間間隔は $\Delta t = 86400(\text{sec})$ とする。

5.1 第1法則

ケプラーの第1法則は, 「惑星は, 太陽を焦点とする楕円軌道を公転する」というものである。

楕円とは2つの焦点からの距離の和が等しい点を結んだ図形で、その距離の和の半分は軌道長半径に等しい。今回の数値シミュレーションで求められた軌道がどの程度楕円とみなしうるのか判定するため、軌道上の点と太陽を1つの焦点とする2つの焦点との距離の和の半分が実際の軌道長半径の値とどの程度食い違うのかを求めた。

火星の軌道について、太陽以外のもう1つの焦点の y 座標は0で、 x 座標は、 y 座標が最大となる x 座標を x_m とすると、 $2x_m$ である。表4より $x_m = -0.142596$ 、したがって $2x_m = -0.285193$ なので、もう一つの焦点の座標は $(-0.285193, 0)$ である。太陽 $(0, 0)$ ともう一つの焦点 $(-0.285193, 0)$ から軌道上の点までの距離の和の半分の変化を求めると(図2)、その値は 1.52342 ± 0.001 でほぼ一定である。また実際の軌道長半径は $1.5235(\text{AU})$ なので、ほぼ等しいといえるだろう。

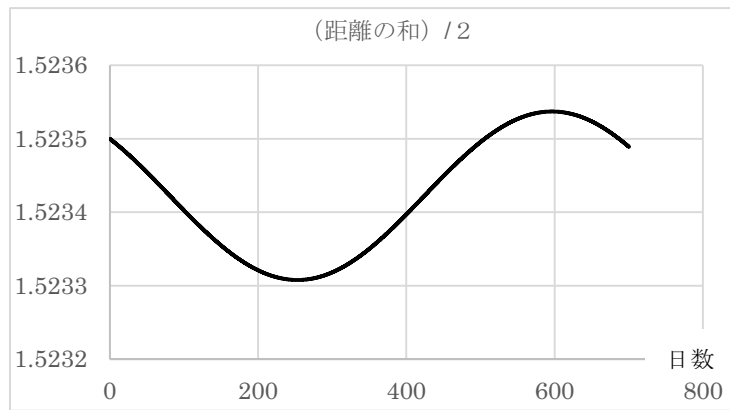


図2 (距離の和) / 2 の変化

5.2 第2法則

ケプラーの第2法則は、「惑星は、惑星と太陽を結ぶ線分がある時間内に描く面積は常に一定である」というものである。ここでは太陽と軌道上の2点で作られる三角形の面積を面積速度とみなし、三角形の面積をヘロンの公式を用いて求めた。

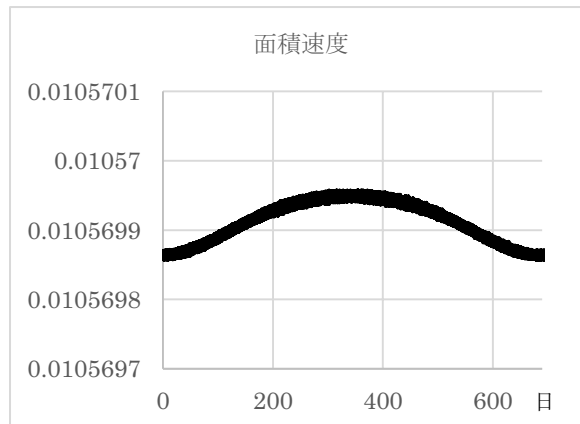


図3 面積速度の変化

ヘロンの公式によると、三角形の三辺の長さをそれぞれ a , b , c とすると、

$$e = \frac{a+b+c}{2}, \quad S = \sqrt{e(e-a)(e-b)(e-c)}$$

で面積 S が求まる。火星について、この面積速度を 1 日ごとに求めてグラフ (図 3) にすると、その変化は 1 公転周期を通じて $\pm 0.0005\%$ で、ほぼ一定であることが分かる。この結果から、数値計算の結果がケプラーの第 2 法則を満たしていることが分かる。

5.3 第 3 法則

ケプラーの第 3 法則は、「太陽系において、惑星の公転周期 T の 2 乗は、楕円軌道の軌道長半径の長さ a の 3 乗に比例する」というもので、ケプラーは観測値に基づいて経験則として導いた。地球、火星については先に計算したが、それらに加えて太陽系の他の 6 つの惑星と冥王星について計算を行った (表 4)。

この表から、公転周期 T の 2 乗と楕円軌道の軌道長半径の長さ L の 3 乗の比がほぼ一定であることが分かる。なお公転周期の () 内の数値は実際の値である。

表 5 惑星のパラメータ

惑星	係数 a	公転周期 T (日)	近日点距離 + 遠日点距離 ($2L$)	T^2/L^3
水星	1.095	88 (87.969)	0.308+0.463	135173.7
金星	1.003	225 (224.70)	0.7184+0.7274	134007.9
地球	1.008	365 (365.256)	0.9833+1.0156	133445.1
火星	1.0455	687 (686.98)	1.381+1.665	133602.2
木星	1.023906	4333 (4332.6)	4.950+5.453	133411.0
土星	1.0266	10759 (10759)	9.0246+10.0530	133371.4
天王星	1.022063	30688 (30688)	18.329+20.041	133368.0
海王星	1.00364	60182 (60182)	29.839+30.277	133368.4
冥王星	1.1167	90465 (90465)	29.7+49.2	133296.9

VI. 考察

今回示した例は、大学における地学基礎実験や地学実験などで実践したもので、プログラミングの授業を兼ねて行い、各自がプログラムを自作する段階から初めて、最終的にはケプラーの法則を確かめる段階まで進んだ実践例である。精度の点では必ずしも満足する結果ではなく、もっと良い計算方法があるが、この程度の手軽さで計算が行え、実際に様々な惑星に関する結果が得られることは、有意義であろうと考える。精密な計算を行う既存のプログラムも多数存在しているが、理解できる程度の物理学と数学を含み、プログラムの自作につなげるには、今回紹介した範囲が適当であろうと考える。これらはすべて情報処理センターもしくは受講者自身のパーソナ

ルコンピュータを用いて行っている。

第9惑星Xとしてその存在が想像されている惑星に対しても、近日点距離と初速度を与えればその軌道のある程度の精度で計算できることは、受講者の興味を喚起することにつながるだろう。

VII. プログラムリスト

オイラー法を用いたC言語によるプログラムの例（火星の場合）

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
int main(void)
{
    int i;
    double Msun = 1.9891e+30;
    double G = 6.67428e-11;
    double dt = 86.4;
    double AU = 1.49597871e+11;
    double x, y;
    double r, cs, ss;
    double a, ax, ay, vx, vy, rr;
    x = 1.381 * AU;
    y = 0.0;
    r = sqrt(pow(x, 2) + pow(y, 2));
    vx = 0.0;
    vy = sqrt(G*Msun/r) * 1.04575;
    printf(" %15.5lf %15.10lf %15.10lf\n", 0.0, x/AU, y/AU);
    for (i=1; i<=700000; i++)
    {
        cs = x / r;
        ss = y / r;
        a = G * Msun / pow(r, 2);
        ax = -a * cs;
        ay = -a * ss;
        vx = vx + ax * dt;
        vy = vy + ay * dt;
        x = x + vx * dt;
        y = y + vy * dt;
        r = sqrt(pow(x, 2) + pow(y, 2));
```

```
printf(“ %15.5lf %15.10lf %15.10lf¥n”, (double)i*dt/86400.0, x/AU, y/AU);  
}  
return 0;  
}
```

引用・参考文献

国立天文台，2020，理科年表，丸善書店

浜島書店編集部，2018，ニューステージ新地学図表，浜島書店